МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Ульяновский государственный педагогический университет

имени И.Н. Ульянова»

ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ

для направления подготовки бакалавров 050100.62

«Педагогическое образование»

Профиль: Математика

Учебное пособие

Ульяновск, 2014

УДК 517

ББК 22.12

Ч67

Числовые системы: учебное пособие для направления подготовки бакалавров 050100.62 «Педагогическое образование» Профиль: «Математика» / составитель Н.В. Глухова. – Ульяновск: УлГПУ, 2014. – 80 с.

Рецензенты: ● доктор технических наук, профессор кафедры естественно-научных дисциплин Ульяновского высшего авиационного училища гражданской авиации **Лебедев А.М.**
● кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой методики преподавания математики и информатики Ульяновского государственного педагогического университета им. И.Н. Ульянова **Сидоров Н.В.**
● кандидат физико-математических наук, доцент алгебро-геометрических вычислений ФГБОУ ВПО УлГУ Фролова Ю.Ю.

ISBN 978-5-86045-709-6

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 050100.62 «Педагогическое образование» Профили: «Математика и информатика», «математика и иностранный язык», «физика и математика». В пособии подробно рассмотрены все теоретические вопросы, предполагаемые к изучению в рамках курса «числовые системы», представлены задания для самостоятельного решения.

© Глухова Н.В., составление, 2014

© Ульяновск, УлГПУ, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Педагогическое образование» математических профилей, то есть для будущих учителей математики. Целью дисциплины «Числовые системы» является детальное знакомство будущих учителей со строгими теоретическими обоснованиями всех свойств числовых систем, хорошо известных из школьного курса, но не доказываемых в рамках школы. Так, хорошо известный даже первокласснику коммутативный закон сложения, который носит в рамках школьного курса название «переместительный» (формулируется: «от перемены мест слагаемых сумма не меняется»), никогда и никак не доказывается в школьной программе. Понятно, что неразвитость абстрактно-логического мышления первоклассников не позволяет им проводить какие-либо доказательства, они даже не знают что это такое. Однако у учащихся старших классов, от которых учитель уже обязан требовать умения доказывать те или иные теоремы геометрии и алгебры, может возникнуть разумный вопрос – почему же более простые свойства, изучаемые в начальной школе, не доказывались, а теперь от него требуются какие-то доказательства. Учитель не должен становится в тупик при возникновении у учеников просьбы доказать, что $a + b = b + a$, или что «минус на минус даёт плюс». Глубокой методической (и логической!) ошибкой будет и применение примеров в качестве обоснования свойств, что нередко наблюдается у самих учеников. Напротив, учитель может и должен использовать возникновение подобных вопросов для усиления формирующегося познавательного интереса у учащихся, их математической культуры. Ведь, несмотря на то, что доказательства свойств натуральных чисел довольно сложны для «среднего школьника», они вполне доступны для ученика, интересующегося математикой, и могут послужить поводом для знакомства его с методом математической индукции, рассмотрению которого отводится существенное внимание в первой части пособия.

В настоящем пособии приведены строгие аксиоматические определения основных числовых систем: натуральных, целых, рациональных, действительных чисел, систематизированы свойства этих систем, даны доказательства их свойств. Система натуральных чисел разобрана наиболее подробно. Этой системе отводится первая часть пособия. Множество целых чисел обладает алгебраической структурой кольца, поэтому многие свойства данной числовой системы и их доказательства уже знакомы тем, кто изучал базовый курс алгебры (это просто свойства колец), эти доказательства повторяются в пособии, но несколько менее подробно. Аксиоматическая теория рациональных чисел во многих отношениях аналогична теории целых чисел, поэтому эта теория рассмотрена кратко, с акцентом на отличительные черты данной системы. Теория действительных чисел достаточно глубоко затрагивается в рамках вводного курса математического анализа, в настоящем пособии систематизируются сведения о поле действительных чисел, рассматривается аксиоматика упорядоченных полей. В последней части пособия представлены также краткие сведения о комплексных числах и дальнейшем их обобщении – системе кватернионов.

Часть 1. Натуральные числа

1.1. ВВОДНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АКСИОМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ

Слова «Аксиома» происходит от древнегреческого αξίωμα (утверждение, положение), под ним понимают математическое предложение, принимаемое как истинное без доказательства. Построение аксиоматической теории начинается с перечисления *основных объектов* (*первичных терминов*) – интуитивно понятных слов, которым, однако, не дается строгих определений (в геометрии, например, в аксиоматической теории Гильберта первичные термины – это точка, прямая и плоскость, в аксиоматике Вейля – точка и вектор). Затем указываются *основные отношения* между основными объектами, которые также никак не определяются (например, для точки и прямой основным неопределяемым отношением является отношение «точка лежит на прямой», что значит «лежать на…» интуитивно всем понятно, но этому не дается никакого определения). Наконец строятся некоторые утверждения относительно основных объектов и основных отношений, которые принимаются истинными без доказательства – это *аксиомы*. Далее эта теория развивается: при помощи логических правил из аксиом выводятся новые утверждения – это теоремы. Аксиоматические теории, в которых явно присутствуют правила вывода, называются формальными, остальные содержательными.

Аксиомы могут быть выбраны произвольно, но, исходя из практических нужд, к ним предъявляются определенные требования. К таким требованиям относятся *независимость, непротиворечивость, полнота*.

Непротиворечивой называется аксиоматическая теория, в которой нет такого утверждения w, что само это утверждение w истинно, и одновременно его отрицание $\overline{w}$ истинно. Противоречивые теории не имеет смысла рассматривать, так как согласно логическим правилам в такой теории можно как доказать, так и опровергнуть любое утверждение.

Поскольку построить и проверить все возможные утверждения достаточно развитой теории крайне затруднительно, если не сказать невозможно, то для проверки непротиворечивости аксиоматических теорий используется так назы-

ваемый *метод моделей*. **Моделью** аксиоматической теории W называется некоторая другая аксиоматическая (или даже интуитивная теория) W*, такая, что всем основным объектам и основным отношениям теории W поставлены в соответствие некоторые объекты и отношения W*, так что всем аксиомам W соответствуют истинные утверждения (теоремы) W*. Если модель удается построить в рамках некоторой, заведомо непротиворечивой, аксиоматической теории, то и наша аксиоматическая теория будет непротиворечивой (иначе, была бы противоречивой и теория, в которой построена модель). Для самой же первой из всех аксиоматической теории логический путь обоснования непротиворечивости закрыт. Такой «первой» аксиоматической теорией служит теория натуральных чисел. Свидетельством непротиворечивости данной теории может служить лишь опыт работы с натуральными числами (который составляет более 6 тысячелетий, во время которых противоречий в этой теории найдено не было). Можно также построить и «интуитивные» модели, которые будут рассмотрены в параграфе 1.2.

Независимой называется такая система аксиом, в которой ни одну из аксиом нельзя доказать, исходя из остальных, как теорему. Для доказательства независимости каждую из аксиом поочерёдно заменяют на её отрицание (остальные аксиомы оставляют прежними) и строят модель получившейся теории. Например, если в аксиоматической теории есть три аксиомы A_1, A_2, A_3, то для доказательства независимости A_1 пытаются построить модель теории $\overline{A}_1$, A_2, A_3, для доказательства независимости A_2 – модель теории, A_1, $\overline{A}_2$, A_3, а для доказательства независимости аксиомы A_3 – модель теории, A_1, A_2, $\overline{A}_3$. Если модель удаётся построить в рамках заведомо непротиворечивой теории, то заменяемая аксиома не зависит от остальных. Действительно, если бы аксиома зависела от остальных, то её бы можно было доказать, пользуясь остальными, и мы получили бы противоречие этой теоремы (соответствующей исходной аксиоме) с ее отрицанием, которое также является истинным, что в рамках непротиворечивой теории невозможно.

Полнота аксиоматической теории (в широком смысле) – требование к аксиоматической теории согласно которому любое утверждение из данной теории либо само должно является теоремой, либо его отрицание является теоремой. Это требование не является справедливым для большинства теорий, в том числе и для аксиоматической теории натуральных чисел (теорема о том, что аксиоматическая теория натуральных чисел не является полной в широком смысле, доказана К. Гёделем в 1931 году). Поэтому чаще рассматривается более слабое требование: *полнота в узком смысле* или *категоричность*.

Категоричность аксиоматической теории (полнота в узком смысле) – требование к аксиоматической теории, согласно которому любые две модели данной аксиоматической теории должны быть *изоморфны* между собой (две модели называются изоморфными, если существует такое взаимно-однозначное отображение одной модели на другую, которое сохраняет все основные отношения между основными объектами данных моделей).

1.2. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

При построении аксиоматической теории натуральных чисел первичными терминами будут являться «элемент» или «число» (которые в контексте данного пособия мы можем рассматривать как синонимы) и «множество», основными отношениями: «принадлежность» (элемент принадлежит множеству), «равенство» и «*следовать за*», обозначаемое $a^{/}$ (читается «число а штрих следует за числом а», например, за двойкой следует тройка, то есть $2^{/} = 3$, за числом 10 следует число 11, то есть $10^{/} = 11$ и т.д).

Множеством натуральных чисел (натуральным рядом, положительными целыми числами) называется множество N с введённым отношением «следовать за», в котором выполнены следующие 4 аксиомы:

A_1. Во множестве N существует элемент, называемый *единицей*, который не следует ни за каким другим числом.

A_2. Для каждого элемента натурального ряда существует единственный следующий за ним.

A_3. Каждый элемент N следует не более чем за одним элементом натурального ряда.

A_4. (*Аксиома индукции*) Ели подмножество M множества N содержит в себе единицу, а также вместе с каждым своим элементом a содержит и следующий за ним элемент $a^/$, то M совпадает N.

Те же аксиомы можно записать кратко с помощью математических символов:

A_1 $(\exists\ 1 \in N)\ (\forall\ a \in N)\ a^/ \neq 1$

A_2 $(\forall\ a \in N)\ (\exists\ a^/ \in N)\ a = b \Rightarrow a^/ = b^/$

A_3 $a^/ = b^/ \Rightarrow a = b$

A_4

$$\left.\begin{array}{r} M \subseteq N \\ 1 \in M \\ a \in M \Rightarrow a^/ \in M \end{array}\right| \Rightarrow M = N$$

Если элемент b следует за элементом a ($b = a^/$), то будем говорить, что элемент a является предшествующим для элемента b (или предшествует b). Данная система аксиом носит название *системы аксиом Пеано* (так как была введена в XIX веке итальянским математиком Джузеппе Пеано). Это лишь один из возможных наборов аксиом, позволяющий определить множество натуральных чисел; существуют и другие эквивалентные подходы.

Простейшие свойства натуральных чисел

Свойство 1. Если элементы различны, то и следующие за ними различны, то есть

$$a \neq b \Rightarrow a^/ \neq b^/.$$

<u>Доказательство</u> осуществляется методом от противного: предположим, что $a^/ = b^/$, тогда (по A_3) $a = b$, что противоречит условию теоремы.

Свойство 2. Если элементы различны, то и предшествующие им (если они существуют) различны, то есть

$$a^/ \neq b^/ \Rightarrow a \neq b.$$

Доказательство: предположим, что $a = b$, тогда, согласно A_2 имеем $a' = b'$, что противоречит условию теоремы.

Свойство 3. Никакое натуральное число не равно следующему за ним.

Доказательство: Введём в рассмотрение множество M, состоящее из таких натуральных чисел, для которых данное условие выполняется

$M = \{a \in N \mid a \neq a'\}$.

Доказательство будем проводить, опираясь на аксиому индукции. По определению множества M, оно является подмножеством множества натуральных чисел. Далее $1 \in M$, так как единица не следует ни за каким натуральным числом (A_1), а значит в том числе и для $a = 1$ имеем: $1 \neq 1'$. Предположим теперь, что некоторое $a \in M$. Это означает, что $a \neq a'$ (по определению M), откуда $a' \neq (a')'$ (свойство 1), то есть $a' \in M$. Из всего выше сказанного на основании аксиомы индукции можно заключить, что $M = N$, то есть наша теорема верна для всех натуральных чисел.

Теорема 4. Для любого натурального числа отличного от 1 существует предшествующее ему число.

Доказательство: Рассмотрим множество

$M = \{1\} \cup \{c \in N \mid (\exists\, a \in N)\ c = a'\}$.

Данное M есть подмножество множества натуральных чисел, единица явно принадлежит данному множеству. Вторая же часть этого множества – это элементы, для которых существуют предшествующие, следовательно, если $a \in M$, то a' тоже принадлежит M (его второй части, так как у a' есть предшествующий – это a). Таким образом, на основании аксиомы индукции M совпадает с множеством всех натуральных чисел, а значит все натуральные числа это либо 1, либо те, для которых существует предшествующий элемент. Теорема доказана.

Непротиворечивость аксиоматической теории натуральных чисел

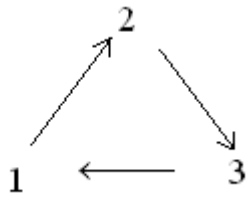
В качестве интуитивной модели множества натуральных чисел можно рассматривать наборы чёрточек: числу 1 будет соответствовать |, числу 2 ||, и т.д., то есть натуральный ряд будет иметь вид:

|, ||, |||, ||||, ||||| ….

Данные ряды чёрточек могут служить моделью натуральных чисел, если в качестве отношения «следовать за» использовать «приписывание одной чёрточки к числу». Справедливость всех аксиом является интуитивно очевидной. Разумеется, данная модель не является строго логической. Для построения строгой модели нужно иметь другую заведомо непротиворечивую аксиоматическую теорию. Но такой теории в нашем распоряжении, как уже отмечалось выше, нет. Таким образом, либо мы вынуждены опереться на интуицию, либо не прибегать к методу моделей, а сослаться на то, что на протяжении более чем 6 тысячелетий, во время которых осуществляется изучение натуральных чисел, никаких противоречий с данными аксиомами обнаружено не было.

Независимость системы аксиом Пеано

Для доказательства независимости первой аксиомы достаточно построить модель, в которой аксиома A_1 ложна, а аксиомы A_2, A_3, A_4 истины. Рассмотрим в качестве первичных терминов (элементов) числа 1, 2, 3, а отношение «следовать за» определим соотношениями: $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 1$.



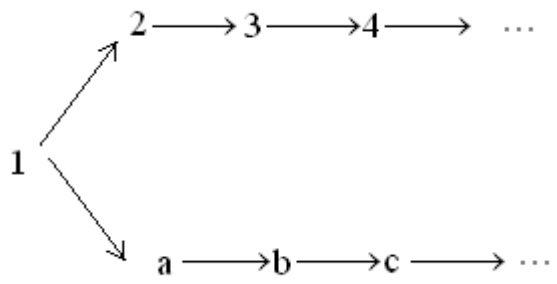
В этой модели нет элемента, который бы не следовал ни за каким другим (аксиома 1 ложна), но все остальные аксиомы выполняются. Таким образом, первая аксиома не зависит от остальных.

Вторая аксиома состоит из двух частей – существования и единственности. Независимость данной аксиомы (в части существования) можно проиллюстрировать на модели из двух чисел {1, 2} с отношением «следовать за», заданным единственным соотношением: $1' = 2$:

$$1 \longrightarrow 2$$

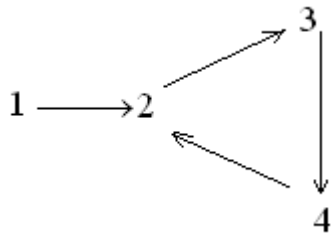
Для двойки отсутствует следующий элемент, аксиомы же A_1, A_3, A_4 истинны.

Независимость данной аксиомы, в части единственности, иллюстрирует модель, в которой множеством N будет множество всех обычных натуральных чисел, а также всевозможных слов (наборов букв, не обязательно имеющих смысл), составленных из букв латинского алфавита (после буквы z следующей будет aa, затем ab … az, затем ba …; за всеми возможными словами из двух букв, последним из которых будет zz, последует слово aaa, и так далее). Отношение «следовать за» введём так, как показано на рисунке:



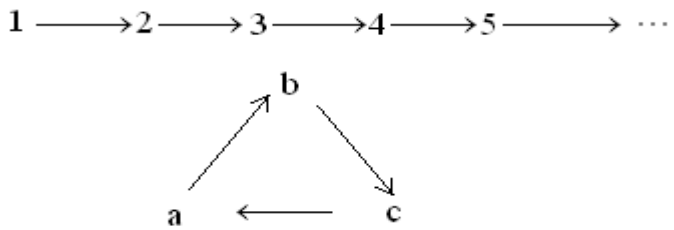
Здесь аксиомы A_1, A_3, A_4 также истинны, но за 1 следует сразу два элемента 2 и a. Таким образом, аксиома 2 не зависит от остальных.

Независимость аксиомы 3 иллюстрирует модель:



в которой A_1, A_2, A_4 истинны, но число 2 следует и за числом 4, и за числом 1.

Для доказательства независимости аксиомы индукции используем множество N, состоящее из всех натуральных чисел, а также трёх букв {a, b, c}. Отношение следования в данной модели можно ввести так, как показано на следующем рисунке:



Здесь для натуральных чисел используется обычное отношение следования, а для букв отношение «следовать за» определяется следующими формулами: $a' = b$, $b' = c$, $c' = a$. Очевидно, что 1 не следует ни за каким натуральным числом, для каждого имеется следующий, и притом только один, каждый элемент следует не более чем за одним элементом. Однако если мы рассмотрим множество M состоящее из обычных натуральных чисел, то это будет подмножество данного множества, содержащее единицу, а также следующий элемент для каждого элемента из M. Однако это подмножество не будет совпадать со всей рассматриваемой моделью, так как не будет содержать в себе буквы a, b, c. Таким образом, аксиома индукции в данной модели не выполняется, а, следовательно, аксиома индукции не зависит от остальных аксиом.

Аксиоматическая теория натуральных чисел является *категоричной* (полной в узком смысле).

Для доказательства категоричности достаточно ввести изоморфизм для любых двух моделей натуральных чисел. Такой изоморфизм можно построить для натуральных чисел исходя из условий:

$\varphi(1) = 1$

$\varphi(n') = (\varphi(n))'$.

Принцип полной математической индукции.

Теорема индукции. Пусть некоторое утверждение P(n) сформулировано для всех натуральных чисел, и пусть а) P(1) – истинно, б) из того, что P(k) истинно, следует, что $P(k')$ также истинно. Тогда утверждение P(n) справедливо для всех натуральных чисел.

Для доказательства введём множество M таких натуральных чисел n ($M \subseteq N$), для которых утверждение P(n) истинно. Воспользуемся аксиомой A_4, то есть попытаемся доказать, что:

1) $1 \in M$;

2) $k \in M \Rightarrow k' \in M$.

Если нам это удастся, то, согласно аксиоме A_4, мы сможем сделать вывод, что $M = N$, то есть P(n) истинно для всех натуральных числе.

1) По условию а) теоремы, P(1) истинно, следовательно, $1 \in M$.

2) Если некоторое $k \in M$, то (по построению M) P(k) – истинно. По условию б) теоремы, это влечёт за собой истинность $P(k^{/})$, а значит $k^{/} \in M$.

Таким образом, по аксиоме индукции (A_4) M = N, а значит P(n) истинно для всех натуральных чисел.

Таким образом, аксиома индукции позволяет создать метод доказательства теорем «по индукции». Данный метод играет ключевую роль при доказательстве основных теорем арифметики, касающихся натуральных чисел. Он состоит в следующем:

1) проверяется справедливость утверждения для n=1 ***(база индукции)****,*

2) предполагается справедливость этого утверждения для n=k, где k – произвольное натуральное число ***(индукционное предположение)****, и с учётом этого предположения устанавливается справедливость утверждения для* $n=k^{/}$ ***(индукционный шаг)****.*

Доказательство, основанное на данном алгоритме, называется доказательством ***методом математической индукции***.

Задания для самостоятельного решения

№ 1.1. Выяснить, какие из перечисленных систем удовлетворяют аксиомам Пеано (являются моделями множества натуральных чисел), определить, какие аксиомы выполнены, а какие – нет.

а) $N = \{3, 4, 5 \ldots\}$, $n^{/} = n + 1$;
б) $N = \{n \geq 6, n \in \mathbf{N}\}$, $n^{/} = n + 1$;
в) $N = \{n \geq -2, n \in \mathbf{Z}\}$, $n^{/} = n + 1$;
г) $N = \{n \geq -2, n \in \mathbf{Z}\}$, $n^{/} = n + 2$;
д) нечётные натуральные числа, $n^{/} = n + 1$;
е) нечётные натуральные числа, $n^{/} = n + 2$;
ж) Натуральные числа с отношением $n^{/} = n + 2$;
з) $N = \{1, 2, 3\}$, $1^{/} = 3$, $2^{/} = 3$, $3^{/} = 2$;
и) $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $1^{/} = 2$, $2^{/} = 3$, $3^{/} = 4$, $4^{/} = 5$, $5^{/} = 1$;
к) Натуральные числа, кратные 3 с отношением $n^{/} = n + 3$
л) Чётные натуральные числа с отношением $n^{/} = n + 2$
м) Целые числа, $n' = \begin{cases} -n, & n > 0 \\ -n+1, & n \leq 0 \end{cases}$.

1.3. СЛОЖЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Сложением натуральных чисел называется бинарная операция, удовлетворяющая следующим двум аксиомам:

C1: $a + 1 = a'$

C2: $a + b' = (a + b)'$

Пример. Найдём на основании определения сумму 2 + 2:

$2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = (2')' = 3' = 4$.

Теорема 1 (*о существовании и единственности сложения*). Каждой паре натуральных чисел a и b соответствует однозначно определённая сумма a + b, удовлетворяющая определению сложения (аксиомам C1 и C2).

Доказательство. Единственность. Предположим, что наряду с операцией +, удовлетворяющей условиям C1 и C2, существует также другая операция ⊕, удовлетворяющая условиям C1′ и C2′:

C1′: $a \oplus 1 = a'$

C2′: $a \oplus b' = (a \oplus b)'$

Тогда для любых натуральных чисел справедливо равенство: $a + b = a \oplus b$.

Доказательство проведём методом математической индукции по переменной b. При b = 1 на основании C1 и C1′ получаем:

$a + 1 = a' = a \oplus 1$

Таким образом, при b = 1 данное свойство справедливо.

Индукционное предположение: $a + k = a \oplus k$

Докажем данное утверждение при $b = k'$:

На основании C2 $a + k' = (a + k)'$

Из индукционного предположения на основании аксиомы A_2 из определения натуральных чисел $a + k = a \oplus k \Rightarrow (a + k)' = (a \oplus k)'$, откуда по условиям C2 и C2′ имеем:

$a + k' = (a + k)' = (a \oplus k)' = a \oplus k'$,

что и требовалось.

Существование. Введённое индуктивное определение позволяет найти сумму для любого второго слагаемого (элемента b). Выясним, можно ли найти сумму для любого первого слагаемого (элемента a). Для этого сами введём операцию, удовлетворяющую условиям (*) и (**)

(*) $1 + b = b'$

(**) $a' + b = (a + b)'$.

Докажем, что введённая нами операция является сложением, то есть удовлетворяет условиям С1 и С2. Доказательство будем проводить индукцией по a.

Начнем с доказательства С1. База индукции: Для a = 1

$1 + 1 = 1'$ (на основании условия (*)).

Индукционное предположение: $k + 1 = k'$

Шаг индукции: Для $a = k'$ требуется доказать, что $k' + 1 = (k')'$.

На основании условия (**) $k' + 1 = (k+1)' = (k')'$ (по индукционному предположению). Таким образом, условие С1 выполняется для всех натуральных a.

С2: Для a = 1 по условию (*) $1 + b' = (b')' = (1 + b)'$.

Индукционное предположение (и.п.): $k + b' = (k + b)'$.

Для $a = k'$ требуется доказать, что $k' + b' = (k' + b)'$.

$$k' + b' \overset{(**)}{=} (k + b')' \overset{(\text{и.п.})}{=} ((k + b)')' \overset{(**)}{=} (k' + b)'.$$

Здесь над каждым равенством указано обоснование – свойство, на основании которого данное равенство выполняется. Таким образом, условие С2 также выполняется для всех натуральных a. Теорема полностью доказана.

Теорема 2. Для любых натуральных чисел a, b, c выполняется *ассоциативный закон сложения* (а.з.с.): (a + b) + c = a + (b +c)

<u>Доказательство</u> (индукцией по c): При c = 1 имеем:

$$(a + b) + 1 \overset{C1}{=} (a + b)' \overset{C2}{=} a + b' \overset{C1}{=} a + (b + 1).$$

Индукционное предположение: (a+b)+k = a+(b+k).

Согласно принципу индукции теперь требуется доказать, что

$(a+b)+k' = a+(b+k')$. Докажем это.

$$(a+b)+k' \overset{C2}{=} ((a+b)+k)' \overset{(и.п.)}{=} (a+(b+k))' \overset{C2}{=} a+(b+k)' \overset{C2}{=} a+(b+k')$$

Таким образом, для k' утверждение справедливо, следовательно, согласно теореме индукции, ассоциативный закон справедлив для любых натуральных чисел.

Теорема 3. Для любых натуральных чисел выполняется коммутативный закон сложения (к.з.с.) $a + b = b + a$

Доказательству теоремы предпошлём лемму.

Лемма 1. $a + 1 = 1 + a$ (Л1)

Докажем её индукцией по a. База индукции: $1 + 1 = 1 + 1$ (справедливо)

Индукционное предположение: $k + 1 = 1 + k$.

Шаг индукции: Докажем, что $k' + 1 = 1 + k'$.

$$k' + 1 \overset{C1}{=} (k')' \overset{C1}{=} (k+1)' \overset{(и.п.)}{=} (1+k)' \overset{C2}{=} 1+k'.$$

Лемма доказана.

Теперь докажем саму теорему индукцией по b. Для $b = 1$ утверждение теоремы истинно по лемме 1.

Индукционное предположение: $a + k = k + a$.

Шаг индукции:

$$a+k' \overset{C2}{=} (a+k)' \overset{(и.п.)}{=} (k+a)' \overset{C2}{=} k+a' \overset{C1}{=} k+(a+1) \overset{(Л1)}{=} k+(1+a) \overset{(а.з.с.)}{=} (k+1)+a \overset{C1}{=} k'+a.$$

Отсюда, утверждение справедливо и для k', что доказывает нашу теорему.

Теорема 4. Сумма двух чисел не равна ни одному из слагаемых:

$a + b \neq b$.

<u>Доказательство</u> индукцией по b: Для $b = 1$ утверждение теоремы истинно по аксиоме 1 из определения натуральных чисел ($a' \neq 1$).

Индукционное предположение: $a + k \neq k$.

Из индукционного предположения и теоремы 1 пункта 1.2 следует, что $(a + k)' \neq k'$. Применяя C2, получаем:

$a + k' = (a + k)' \neq k'$.

Теорема 5. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$.

<u>Доказательство</u> (индукцией по c):

$a = b \Rightarrow$ (по A_2) $a' = b' \Rightarrow$ (по C1) $a + 1 = b + 1$.

Индукционное предположение: $a = b \Rightarrow a + k = b + k$.

Докажем, что $a = b$ влечёт за собой $a + k' = b + k'$.

$$a = b \overset{(\text{и.п.})}{\Rightarrow} a + k = b + k \overset{A_2}{\Rightarrow} (a+k)' = (b+k)' \overset{C2}{\Rightarrow} a + k' = b + k'$$

Таким образом, для k' утверждение справедливо, следовательно, согласно теореме индукции, теорема справедлива для любых натуральных чисел.

Следствие 1. $a + c \neq b + c \Rightarrow a \neq b$ (доказательство проводится методом от противного и предоставляется читателю).

Теорема 6. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

<u>Доказательство</u> (индукцией по c):

$a + 1 = b + 1 \Rightarrow a' = b' \Rightarrow a = b$ (по C1 и A_3).

Индукционное предположение: $a + k = b + k \Rightarrow a = b$.

Докажем, что $a + k' = b + k'$ влечёт за собой $a = b$.

$$a + k' = b + k' \overset{C2}{\Rightarrow} (a + k)' = (b + k)' \overset{A_3}{\Rightarrow} a + k = b + k \overset{(\text{и.п.})}{\Rightarrow} a = b.$$

Отсюда, утверждение справедливо и для k', что доказывает нашу теорему.

Следствие 2. $a \neq b \Rightarrow a + c \neq b + c$ (доказательство методом от противного).

Решением уравнения $a + x = b$ (a, b – натуральные числа, x – переменная) называется такое натуральное число c, при подстановке которого вместо x в уравнение, получается верное числовое равенство $a + c = b$

Теорема 7. Если уравнение $a + x = b$ имеет решение, то это решение единственно.

<u>Доказательство</u>: Предположим, что существуют два решения c_1 и c_2. Тогда $a + c_1 = b$ и $a + c_2 = b$, откуда $a + c_1 = a + c_2$, а по теореме 6 и коммутативному закону это означает, что $c_1 = c_2$ (то есть решение единственно).

Задания для самостоятельного решения

№ 1.2. Сложить на основании определения сложения натуральных чисел 5 + 3. Выполнить то же действие в представленных ниже моделях натуральных чисел

а) $\{3, 4, 5 \ldots\}$; $n' = n + 1$

б) $\{n \geq -2, n \in \mathbf{Z}\}$; $n' = n + 1$

в) нечётные натуральные числа, $n' = n + 2$

г) Целые числа, $n' = \begin{cases} -n, & n > 0 \\ -n+1, & n \leq 0 \end{cases}$

№ 1.3. Докажите равенства для любого натурального n:

а) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

г) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$;

д) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

е) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n - 1) \cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

ж) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{36} + \ldots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$;

з) $\dfrac{0}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{n-1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{n!}$.

1.4. УМНОЖЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Умножением натуральных чисел называется бинарная операция, удовлетворяющая следующим двум аксиомам:

У1: $a \cdot 1 = a$

У2: $a \cdot b' = a \cdot b + a$

Теорема 1. Для любых двух чисел a и b существует однозначно определённое произведение $a \cdot b$, удовлетворяющее определению умножения.

1) Единственность. Предположим, что наряду с операцией $\cdot$ удовлетворяющей условиям У1 и У2 существует также другая операция *, удовлетворяющая условиям С1′ и С2′:

У1′: $a * 1 = a$

У2′: $a * b' = a*b + a$

Наша задача – доказать, что для любых натуральных чисел $a \cdot b = a * b$. Доказательство проведём методом математической индукции по переменной b.

При $b = 1$: $a \cdot 1 = a = a * 1$ (первое равенство на основании У1, второе – на основании У1′). Таким образом, для единицы данное свойство справедливо.

Индукционное предположение: $a \cdot k = a * k$

Докажем данное утверждение при $b = k'$:

$$a \cdot k' \overset{У2}{=} a \cdot k + a \overset{(и.п.)}{=} a * k + a \overset{У2'}{=} a*k'$$

что и требовалось.

2) Существование. Введём операцию, удовлетворяющую условиям (*) и (**)

(*) $1 \cdot b = b'$

(**) $a' \cdot b = ab + b$.

Докажем, что введённая нами операция является умножением, то есть удовлетворяет условиям У1 и У2. Доказательство будем проводить индукцией по a.

У1: Для $a = 1$

$1 \cdot 1 = 1$ (на основании условия (*)).

Индукционное предположение $k \cdot 1 = k$.

Для $a = k^{/}$ требуется доказать, что $k^{/} \cdot 1 = k^{/}$.

На основании условия (**) $k^{/} \cdot 1 = k \cdot 1 + 1 = k + 1 = k^{/}$ (по индукционному предположению и С1). Таким образом, условие У1 выполняется для всех натуральных a.

У2: Для $a = 1$ по условию (*) $1 \cdot b^{/} = b^{/} = b + 1 = 1 \cdot b + 1$.

Индукционное предположение $k \cdot b^{/} = k \cdot b + k$.

Для $a = k^{/}$ требуется доказать, что $k^{/} \cdot b^{/} = k^{/} \cdot b + k^{/}$.

На основании условия (**) $k^{/} \cdot b^{/} = k \cdot b^{/} + b^{/} = (kb + k) + b^{/}$ (по индукционному предположению). В свою очередь,

$(kb + k) + b^{/} = kb + (k + b^{/}) = kb + (k + b)^{/} = kb + (b + k)^{/} = kb + (b + k^{/}) =$

$= (kb + b) + k^{/} = k^{/} \cdot b + k^{/}$.

Таким образом, условие У2 также выполняется для всех натуральных a. Теорема полностью доказана.

Найдём на основании определения произведение $2 \cdot 2$:

$2 \cdot 2 = 2 \cdot 1^{/} = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$.

Теорема 2. Для любых натуральных чисел a, b, c выполняется *дистрибутивный закон* (Д31): $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

<u>Доказательство</u> (индукцией по c):

$(a + b) \cdot 1 = (a + b) = a \cdot 1 + b \cdot 1$ (на основании У1).

Индукционное предположение: $(a+b) \cdot k = a \cdot k + b \cdot k$.

Докажем, что $(a+b) \cdot k^{/} = a \cdot k^{/} + b \cdot k^{/}$. Действительно

$(a+b) \cdot k^{/} = (a+b) \cdot k + a + b = a \cdot k + b \cdot k + a + b = (a \cdot k + a) + (bk + b) = a \cdot k^{/} + b \cdot k^{/}$.

Таким образом, для $k^{/}$ утверждение справедливо, следовательно, согласно теореме индукции, дистрибутивный закон справедлив для любых натуральных чисел.

Теорема 3. Для любых натуральных чисел выполняется коммутативный закон умножения $a \cdot b = b \cdot a$.

Доказательству теоремы предпошлём лемму.

Лемма 2. $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ (Л2)

Доказательство индукцией по a: $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ (справедливо).

Индукционное предположение: $k \cdot 1 = 1 \cdot k$.

Докажем, что $k' \cdot 1 = 1 \cdot k'$.

$$k' \cdot 1 \overset{У1}{=} k' \overset{С1}{=} k + 1 \overset{У1}{=} k \cdot 1 + 1 \overset{(и.п.)}{=} 1 \cdot k + 1 \overset{У2}{=} 1 \cdot k'.$$

Лемма доказана.

Теперь докажем саму теорему индукцией по b. Для b = 1 утверждение теоремы истинно по лемме 2.

Индукционное предположение: $a \cdot k = k \cdot a$.

Шаг индукции:

$$a \cdot k' \overset{У2}{=} a \cdot k + a \overset{(и.п.)}{=} k \cdot a + a \overset{У1}{=} k \cdot a + a \cdot 1 \overset{(Л2)}{=} k \cdot a + 1 \cdot a \overset{(ДЗ1)}{=} (k + 1) \cdot a \overset{С1}{=} k' \cdot a.$$

Таким образом, для k' утверждение справедливо, следовательно, согласно теореме индукции, коммутативный закон доказан для любых натуральных чисел.

В теореме 2 мы доказали одну из форм дистрибутивного закона. Теперь мы имеем возможность доказать и вторую форму дистрибутивного закона.

Теорема 4. Для любых натуральных a, b, c: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (ДЗ2).

<u>Доказательство:</u> $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$.

Теорема 5. Для любых натуральных чисел a, b, c выполняется *ассоциативный закон умножения*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

<u>Доказательство</u> (индукцией по c):

$(a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot b = a \cdot (b \cdot 1)$.

Индукционное предположение: $(a \cdot b) \cdot k = a \cdot (b \cdot k)$.

Докажем, что $(a \cdot b) \cdot k' = a \cdot (b \cdot k')$

$(a \cdot b) \cdot k' = ((a \cdot b) \cdot k) + a \cdot b = a \cdot (b \cdot k) + a \cdot b = a \cdot (b \cdot k + b) = a \cdot (b \cdot k')$.

(пояснения расставьте самостоятельно). Таким образом, для k' утверждение справедливо, следовательно, теорема доказана.

Теорема 6. $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$.

<u>Доказательство</u> (индукцией по c): $a = b \Rightarrow a \cdot 1 = b \cdot 1$ (по У1).

Индукционное предположение: $a = b \Rightarrow a \cdot k = b \cdot k$.

Докажем, что a = b влечёт за собой и $a \cdot k' = b \cdot k'$.

a = b => $a \cdot k = b \cdot k$. Прибавим к правой и левой части a:

$a \cdot k + a = b \cdot k + a$.

Так как по условию a = b, сделаем замену в правой части равенства:

$a \cdot k + a = b \cdot k + b$ откуда по У2: $a \cdot k' = b \cdot k'$

Таким образом, для k' утверждение справедливо, следовательно, согласно теореме индукции, теорема справедлива для любых натуральных чисел.

Следствие 1. $a \cdot c \neq b \cdot c \Rightarrow a \neq b$ (доказательство методом от противного).

Закон сокращения для умножения будет доказан в следующем параграфе.

Задания для самостоятельного решения

№ 1.4. Умножить на основании определения числа 5 и 3. Выполнить то же действие в представленных ниже моделях натуральных чисел

а) {3, 4, 5 …}; $n' = n + 1$

б) $\{n \geq -2, n \in \mathbf{N}\}$; $n' = n + 1$

в) нечётные положительные числа, $n' = n + 2$

г) Целые числа, $n' = \begin{cases} -n, & n > 0 \\ -n+1, & n \leq 0 \end{cases}$

№ 1.5. Расставьте над знаками равенств в теореме 5 все обоснования.

№ 1.6. Введём в рассмотрение операцию суммирования n натуральных чисел ($\sum_{i=1}^{n} a_i$) по следующему правилу:

1) при n = 1: $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$, 2) при n = k + 1: $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}$.

Если считать, что все a_i равны между собой и равны a, то построенную сумму будем называть n-кратным числа a и обозначать символом «*na*»:

1) $1a = \sum_{i=1}^{1} a = a$ 2) $(k+1)a = \sum_{i=1}^{k+1} a = \sum_{i=1}^{k} a + a$

Докажите, что натуральное n-кратное числа a совпадает с произведением a·n.

№ 1.7. Докажите, что для любого натурального n

а) $n^3 - n$ делится на 3;

б) $n^5 - n$ делится на 5;

в) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7;

г) $2^{2n+1} \cdot 3^{n+3} + 1$ делится на 11;

д) $n^7 - n$ делится на 7;

е) $3^{2n} + 2^{6n-5}$ делится на 11;

ж) $3^{2n} - 2^n$ делится на 7.

1.5. УПОРЯДОЧЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. НЕРАВЕНСТВА НА МНОЖЕСТВЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Будем говорить, что натуральное число *a больше*, чем натуральное число *b* (и обозначать $a > b$), если существует такое натуральное k, что $a = b + k$.

Теорема 1. Единица не больше никакого натурального числа.

Действительно, условие $1 > a$ влечёт за собой $1 = a + k$, что невозможно: для $k = 1$ получим $1 = a^{/}$, что противоречит первой аксиоме натуральных чисел; для $k \neq 1$ найдём для него предшествующий и вновь придем к тому же противоречию.

Данное отношение «больше» является *антирефлексивным* (не верно, что $a > a$) и *транзитивным* ($a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$), то есть является *отношением строгого порядка*. Более того, данное отношение является отношением линейного порядка, то есть для множества натуральных чисел справедлива теорема о трихотомии:

Теорема о трихотомии: Для любых двух натуральных чисел справедливо одно и только одно из следующих трёх утверждений:

1) $a > b$

2) $b > a$

3) $a = b$.

<u>Доказательство</u>: Вначале покажем, что никакие два из трёх условий не выполняются одновременно. Допустим, что выполнены условия 1 и 2. Тогда

$$a = b + k,\ b = a + n \Rightarrow a = a + (n + k) \Rightarrow a > a,$$

что противоречит антирефлексивности отношения «больше». Аналогично устанавливается несовместность условий 2 и 3, условий 1 и 3.

Теперь докажем, что одно из трёх условий обязательно имеет место для любых чисел a и b. Используем математическую индукцию по b. При $b = 1$, в зависимости от a: либо $a = 1 = b$, либо для a имеется предшествующий, тогда

$$a = c^{/} = c + 1 = 1 + c = b + c \Rightarrow a > b.$$

Таким образом, для $b = 1$ утверждение теоремы справедливо. Сделаем индукционное предположение о том, что теорема справедлива для некоторого x, а

именно, что x сравним с числом a, то есть возможны три варианта: либо $a > x$, либо $x > a$, либо $x = a$. Тогда докажем, что и $x^{/}$ также сравним с a. В первом случае $a > x$, то есть $a = x + k$. В зависимости от того, будет данное k равно 1 или нет, получим

а) $a = x + 1 = x^{/}$ (теорема справедлива)

б) $a = x + c^{/} = x + c + 1 = x + 1 + c = x^{/} + c \Rightarrow a > x^{/}$.

Во втором случае $x > a$, но тогда

$x = a + m$,

$x^{/} = (a + m) + 1 = a + (m + 1)$,

то есть $x^{/} > a$. Аналогично при $x = a$, $x^{/} = x + 1 = a + 1$, то есть снова $x^{/} > a$. Теорема полностью доказана.

Теперь можно ввести понятия $<$, $\leq$, $\geq$.

$a < b \Leftrightarrow b > a$;

$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$

$a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$.

Свойства монотонности:

Для операции сложения:

1) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$;

2) $a + c > b + c \Rightarrow a > b$;

3) $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

Те же свойства имеют место и для других знаков $<$, $\leq$, $\geq$.

Для операции умножения:

4) $a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$;

5) Закон сокращения: $ac = bc \Rightarrow a = b$

6) $ac > bc \Rightarrow a > b$;

7) $a > b \wedge c > d \Rightarrow ac > bd$.

Те же свойства имеют место и для других знаков $<$, $\leq$, $\geq$.

Приведём в качестве примера доказательства свойств 4 и 5. Так как $a > b$, по определению $a = b + k$, тогда $a \cdot c = (b + k) \cdot c = b \cdot c + k \cdot c$, что означает, что $a \cdot c > b \cdot c$, и свойство 4 доказано. Свойство 5 докажем методом от противного.

Пусть $ac = bc$, но предположим, что $a \neq b$, но тогда, по теореме о трихотомии, либо $a > b$, либо $b > a$, но это означает, согласно свойству 4, что либо $ac > bc$, либо $bc > ac$, что противоречит условию ($ac = bc$).

Теорема о дискретности. Между двумя соседними натуральными числами нельзя вставить натуральное число:

$(\forall\ a, x \in N)$ не верно, что $a < x < a^{/}$

<u>Доказательство</u> (методом от противного). Пусть $a < x < a^{/}$. Тогда $x = a + k$,

$a^{/} = x + n = a + k + n \Rightarrow a + 1 = a + k + n \Rightarrow 1 = k + n$.

Последнее равенство невозможно, так как противоречит теореме о том, что единица не больше никакого натурального числа.

Терема Архимеда. Для любых натуральных чисел a и b существует такое натуральное n, что $a < bn$.

Доказательство проведём индукцией по b. Для $b = 1$, $n = a^{/}$. Сделаем индукционное предположение, что для $b = k$ требуемое n существует, то есть $a < kn$. Но тогда тем более $a < k^{/}n = kn + k$. Теорема доказана.

Наименьшим элементом множества M будем называть такой элемент $c \in M$, что для любых элементов $m \in M$ выполнено неравенство: $c \leq m$.

Теорема о наименьшем элементе. Любое непустое подмножество множества натуральных чисел имеет наименьший элемент.

<u>Доказательство</u>: Если M – подмножество N, содержащее в себе 1, то 1 как раз и будет искомым наименьшим элементом. Если же 1 не входит в множество M, то рассмотрим вспомогательное множество A, состоящее из всех натуральных чисел меньших, чем все натуральные числа из множества M:

$A = \{a \in \mathbf{N} \mid (\forall\ m \in M)\ a < m\}$.

Из этого построения, в частности следует, что множества A и M не имеют общих элементов. Кроме того, A – не пусто, так как $1 \in A$. В A есть также элемент b, что $b^{/} \notin A$. Действительно, если бы такого элемента не было, то по аксиоме индукции можно было бы доказать, что $A = \mathbf{N}$, но тогда M было бы пусто, что не соответствует условию теоремы. Элемент $b^{/} = c$ как раз и будет наименьшим элементом во множестве M. Действительно, $c \leq m$ для любого $m \in M$

(если бы это было не так, то неравенство $c > m$ выполнялось бы хотя бы при одном натуральном m, но $b \in A$, поэтому $b < m < c = b^{/}$, что противоречит теореме о дискретности). Кроме того, c не может быть строго меньше всех элементов множества M, иначе $c \in A$, что противоречит его выбору. Таким образом, c равен хотя бы одному элементу из M, а значит $c \in M$, то есть действительно c – наименьший элемент множества M. Теорема доказана.

Заметим, что не всякое подмножество множества натуральных чисел имеет наибольший элемент, но если это подмножество конечно, то в нём имеется и наибольший элемент. Верно и обратное. Если подмножество множества натуральных чисел имеет наибольший элемент, то это подмножество конечно. Можно доказать даже более общее утверждение: непустое подмножество множества натуральных чисел ограничено сверху тогда и только тогда, когда оно конечно (имеет наибольший элемент).

Задания для самостоятельного решения

№ 1.8. Докажите антирефлексивность и транзитивность отношения «больше» на множестве натуральных чисел.

№ 1.9. Докажите свойства монотонности 1, 2, 3, 6, 7 из данного параграфа.

№ 1.10. Докажите неравенства для всех натуральных n

а) $5^n > 7n - 3$;

б) $2^{n+2} > 2n + 5$;

в) $2^{n+2} > n^2 + 2$;

г) $2^n > n$;

д) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$.

1.6. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ПРИНЦИПА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Помимо уже описанного принципа математической индукции при доказательстве ряда теорем можно также использовать и следующие его вариации.

1) *Усиленный принцип математической индукции.*

Пусть некоторое утверждение P(n) сформулировано для всех натуральных чисел, и пусть а) P(1) – истинно, б) из того, что P(k) истинно для всех натуральных k меньших, чем некоторое натуральное a, следует, что P(a) также истинно. Тогда утверждение P(n) справедливо для всех натуральных чисел.

Доказательство. Предположим, что утверждение P(n) истинно не для всех натуральных чисел, тогда введём в рассмотрение множество A тех натуральных чисел, для которых утверждение P(n) ложно. Данное множество не пусто, следовательно, у него имеется наименьший элемент (обозначим его a). Этот элемент не может быть равен 1, так как по условию P(1) истинно. Таким образом, существуют натуральные числа меньшие, чем a, и все они не принадлежат множеству A, а значит для всех этих элементов утверждение P(n) истинно. Но из условия (б) теоремы следует, что и P(a) тоже истинно, что противоречит выбору элемента a. Полученное противоречие возникло из допущения о том, что утверждение верно не для всех натуральных чисел. Поэтому данное предположение неверно, что и доказывает требуемое.

2) *Обобщённый принцип математической индукции.*

Пусть некоторое утверждение P(n) сформулировано для всех натуральных чисел $n \geq a$ (a – некоторое натуральное число), и пусть а) P(a) – истинно, б) из того, что P(k) истинно для некоторого $k \geq a$, следует, что P(k+1) также истинно. Тогда утверждение P(n) справедливо для всех натуральных чисел $n \geq a$.

Доказательство. Предположим, что утверждение P(n) истинно не для всех натуральных чисел $n \geq a$, тогда введём в рассмотрение множество A тех натуральных чисел $n \geq a$, для которых утверждение P(n) ложно:

$$A = \{n \in \mathrm{N},\ n \geq a \mid \mathrm{P}(n) \text{ – ложь}\}.$$

Данное множество не пусто, следовательно, у него имеется наименьший элемент (обозначим его c). Этот элемент $c > a$, так как P(a) – истинно. Таким образом, $c \neq 1$, так как 1 не может быть больше натурального числа, а значит, число $b = c - 1$ также является натуральным и при этом не меньше, чем a. b не принадлежит множеству A (так как $b < c$, а c – наименьший элемент A), следовательно, утверждение P(b) истинно. Но из условия (б) теоремы следует, что и P(b + 1) = P(c) тоже истинно, что противоречит выбору элемента c (c – наименьший элемент множества A, где утверждение ложно). Полученное противоречие доказывает предложение.

3) *Обобщённый усиленный принцип полной математической индукции.*

Пусть некоторое утверждение P(n) сформулировано для всех натуральных чисел $n \geq a$ ($a \in N$), и пусть а) P(a) – истинно, б) из того, что P(k) истинно для всех натуральных k, таких что $a \leq k < c$ следует, что P(c) также истинно. Тогда утверждение P(n) справедливо для всех натуральных чисел $n \geq a$.

<u>Доказательство:</u> Предположим, что утверждение P(n) истинно не для всех натуральных чисел $n \geq a$, тогда введём в рассмотрение множество A тех натуральных чисел $n \geq a$, для которых утверждение P(n) ложно:

$A = \{n \in N, n \geq a \mid P(n) – ложь\}$.

Данное множество не пусто, следовательно, у него имеется наименьший элемент (обозначим его c). Этот элемент $c > a$, так как P(a) – истинно. Таким образом, существуют натуральные числа k из промежутка $a \leq k < c$, и все они не принадлежат множеству A, а значит для них утверждение P(n) истинно. Но из условия (б) теоремы следует, что и P(c) тоже истинно, что противоречит выбору элемента c. Данное противоречие доказывает теорему. **Пример.** Доказать, что $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ при всех $n \geq 2$.

Решение. 1) При $n = 2$ сумма в левой части состоит из двух слагаемых $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, имеем $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{24} + \frac{6}{24} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$.

2) Предположим, что неравенство верно для $n=k$, $k \geq 2$, то есть

$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$. Используя это предположение, докажем, что неравенство справедливо при n = k + 1:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}.$$

К правой и левой частям неравенства индукционного предположения прибавим $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$ и отнимем $\frac{1}{k+1}$ (неравенство от этого не изменится). Получим

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}+\frac{2k+2+2k+1-2(2k+1)}{2(k+1)(2k+1)}$$

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$$

Так как числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$ натуральные числа, дробь положительна, а, следовательно, отбрасывание данной дроби усилит данное неравенство:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}>\frac{13}{24}$$

Следовательно, для n = k +1 неравенство справедливо, и на основании принципа обобщённой математической индукции утверждение доказано.

Задания для самостоятельного решения

№ 1.11. Доказать неравенство для всех натуральных чисел, больших данного n.

а) $3^n > 2^n + n$ при $n > 1$

б) $2^n > n^2 + n + 2$ при $n > 5$

в) $2^{n-1} \geq n(n+1)$ при $n > 6$

г) $n^2 < 2^n$ при $n > 4$

д) $2^n < n!$ при $n > 3$

е) $2^n > n^3$ при $n > 9$

ж) $n! > 2^{n-1}$ при $n > 2$

з) $2^n > 2n + 1$ при $n > 4$.

№ 1.12. Доказать неравенство для натуральных чисел n при заданном ограничении

а) $3^n > 5n + 1$ при $n \geq 3$

б) $4^n > 3^n + 2^n$ при $n \geq 2$

в) $2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$ при $n \geq 3$

г) $2^n > 2n^2 - 3n + 1$ при $n \geq 6$

д) $5^n > 7n - 3$ при любом n

е) $3^n > 5n + 1$ при $n \geq 3$

ж) $4^n > 3^n + n^2$ при $n \geq 2$

з) $3^n > 5n^2$ при $n \geq 4$

1.7. ДРУГИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Натуральной степенью числа a (обозначается a^n) называется операция, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $a^1 = a$;

2) $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Свойства степеней:

1) $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$.

2) $(a^n)^m = a^{nm}$.

3) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

Вычитанием двух натуральных чисел a – b называется операция, которая паре чисел a и b ставит в соответствие натуральное число c такое, что a = b + c. a называется *уменьшаемым*, b – *вычитаемым*, c – *разностью*.

Вычитание для натуральных чисел не является бинарной операцией (множество натуральных чисел не замкнуто относительно вычитания).

Свойство 1. Разность двух натуральных чисел a и b существует тогда и только тогда, когда a > b.

Доказательство следует непосредственно из определения разности и «больше».

Свойство 2. Если разность двух натуральных чисел существует, то она единственна.

Доказательство осуществляется методом от противного. Предположим, что существуют две разности c_1 и c_2 чисел a и b, тогда

$a = b + c_1 = b + c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$ (по закону сокращения).

Делением натуральных чисел a и b называется операция, которая этим числам ставит в соответствие натуральное число c = a : b, такое, что a = b·c. a называется делимым, b – делителем, а c – частным.

Частное также существует далеко не для любых двух натуральных чисел.

Свойство 3. Для существования частного двух натуральных чисел a и b необходимо, но не достаточно, чтобы a ≥ b.

Доказательство: Если частное $a : b$ существует, то $a = b \cdot c$. Если $c = 1$, то $a = b$ и теорема справедлива, если же c отлично от 1, то для c существует предшествующий (обозначим его x), тогда $c = x'$, откуда $a = b \cdot c = b \cdot (x + 1) = bx + b \Rightarrow a > b$, что также доказывает теорему.

Свойство 4. Если разность двух натуральных чисел существует, то она единственна.

Доказательство осуществляется методом от противного. Предположим, что существуют два частных от деления чисел a и b: c_1 и c_2, тогда

$a = bc_1 = bc_2 \Rightarrow c_1 = c_2$ (по закону сокращения).

Задания для самостоятельного решения

№ 1.13. Доказать свойства степеней методом математической индукции

№ 1.14. Доказать свойства:

а) Для любых натуральных чисел разность $(a + b) - b$ существует и равна a;

б) Если разность $b - c$ существует, то

$a + (b - c) = (a + b) - c$;

в) Если $a > b > c$, то

$a - (b - c) = (a - b) + c$;

г) Если разность $a - (b + c)$ существует, то

$a - (b + c) = (a - b) - c$.

Часть 2. Целые и рациональные числа

2.1. КОЛЬЦО ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

Натуральные числа не являются кольцом, так как 0 не является натуральным числом, а также для натуральных чисел нет натуральных противоположных им. Структура, образуемая натуральными числами, называется *полукольцом.* Более точно,

Полукольцом называется коммутативная полугруппа по сложению и полугруппа по умножению, в которой операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами.

Введём теперь строгие определения целых чисел и докажем их эквивалентность. Исходя из представлений об алгебраических структурах и того факта, что множество натуральных числе является полукольцом, но не является кольцом, можно ввести следующее определение:

Определение 1. Кольцом целых чисел называется минимальное кольцо, содержащее в себе полукольцо натуральных чисел.

Данное определение ничего не сообщает о внешнем виде таких чисел. В школьном курсе целые числа определяются как натуральные числа, им противоположные и 0. Данное определение также можно взять за основу для построения строгого определения.

Определение 2. Кольцом целых чисел называется кольцо, элементами которого являются натуральные числа, им противоположные и 0 (и только они).

Теорема 1. Определения 1 и 2 эквивалентны.

<u>Доказательство</u>: Обозначим через Z_1 кольцо целых чисел в смысле определения 1, а через Z_2 – кольцо целых чисел в смысле определения 2. В начале докажем, что Z_2 включается в Z_1. Действительно, все элементы Z_2 это либо натуральные числа (они принадлежат Z_1, так как Z_1 содержит в себе полукольцо натуральных чисел), либо им противоположные (они тоже принадлежат Z_1, так как Z_1 кольцо, а значит для каждого элемента этого кольца существует противоположный, и для каждого натурального $n \in Z_1$, $-n$ также принадлежит Z_1),

либо 0 ($0 \in Z_1$, так как Z_1 кольцо, а в любом кольце имеется 0), таким образом, любой элемент из Z_2 принадлежит также и Z_1, а значит $Z_2 \subseteq Z_1$. С другой стороны, Z_2 содержит в себе полукольцо натуральных чисел, а Z_1 является минимальным кольцом, содержащим в себе натуральные числа, то есть не может содержать в себе никакого **другого** кольца, удовлетворяющего этому условию. Но мы показали, что оно содержит в себе Z_2, а значит $Z_1 = Z_2$. Теорема доказана.

Определение 3. Кольцом целых чисел называется кольцо, элементами которого являются все возможные элементы, представимые в виде разности b – a (все возможные решения уравнения a + x = b), где a и b – произвольные натуральные числа.

Теорема 2. Определение 3 эквивалентно двум предыдущим.

Доказательство: Обозначим через Z_3 кольцо целых чисел в смысле определения 3, а через $Z_1 = Z_2$, как и раньше, – кольцо целых чисел в смысле определения 1 и 2 (их равенство уже установлено). Сначала докажем, что Z_3 включается в Z_2. Действительно, все элементы Z_3 можно представить в виде некоторых разностей натуральных чисел b – a. Для любых двух натуральных чисел по теореме о трихотомии возможно три варианта:

1) $b > a$

В этом случае разность b – a также является числом натуральным и потому принадлежит Z_2.

2) $a = b$

В этом случае разность двух равных между собой элементов обозначим символом 0. Докажем, что это действительно нуль кольца, то есть нейтральный элемент относительно сложения. Для этого воспользуемся определением разности $a - a = x \Leftrightarrow a = a + x$ и докажем, что $b + x = b$ для любого натурального b. Для доказательства достаточно прибавить к правой и левой части равенства $a = a + x$ элемент b, а затем воспользоваться законом сокращения (все эти действия можно выполнять исходя из известных свойств колец). Нуль же принадлежит Z_2.

3) $a > b$

В этом случае разность a – b есть число натуральное, обозначим

b – a = – (a – b). Докажем, что элементы a – b и b – a действительно являются противоположными, то есть в сумме дают нуль. В самом деле, если обозначить a – b = x, b – a = y, то получим, что a = b + x, b = y + a. Складывая почленно полученные равенства и сокращая b, получим a = x + y + a, то есть x + y = a – a = 0. Таким образом a – b = – (b – a) является числом противоположным натуральному, то есть вновь принадлежит Z_2. Таким образом, $Z_3 \subseteq Z_2$.

С другой стороны Z_3 содержит в себе полукольцо натуральных чисел, так как любое натуральное число n всегда можно представить как

$n = n^{/} - 1 \in Z_3$,

а значит $Z_1 \subseteq Z_3$, так как Z_1 является минимальным кольцом, содержащим в себе натуральные числа. Пользуясь уже доказанным фактом, что $Z_2 = Z_1$, получаем $Z_1 = Z_2 = Z_3$. Теорема доказана.

Множество целых чисел далее будем обозначать просто символом **Z**.

Хотя на первый взгляд может показаться, что никаких аксиом в перечисленных определениях целых чисел нет, данные определения являются аксиоматическими, так как во всех трёх определениях говорится, что множество целых чисел является кольцом. Поэтому аксиомами в аксиоматической теории целых чисел служат условия из определения кольца.

Докажем, что *аксиоматическая теория целых чисел непротиворечива*. Для доказательства необходимо построить модель кольца целых чисел, пользуясь заведомо непротиворечивой теорией (в нашем случае это может быть только аксиоматическая теория натуральных чисел).

Согласно определению 3, каждое целое число представимо в виде разности двух натуральных z = b – a. Сопоставим каждому целому числу z соответствующую пару <b, a>. Недостатком данного соответствия является его неоднозначность. В частности, числу 2 соответствуют и пара <3, 1 >, и пара <4, 2>, а также множество других. Числу 0 соответствуют и пара <1, 1>, и пара <2,2>, и пара <3, 3>, и так далее. Избежать этой проблемы помогает понятие *эквива-*

лентности пар. Будем говорить, что пара $<a, b>$ *эквивалентна* паре $<c, d>$, если $a + d = b + c$ (обозначение: $<a, b> \cong <c, d>$).

Введённое отношение является рефлексивным, симметричным и транзитивным (доказательство предоставляется читателю).

Как и всякое отношение эквивалентности, данное отношение порождает разбиение множества всевозможных пар натуральных чисел на классы эквивалентности, которые мы будем обозначать как $[<a, b>]$ (каждый класс состоит из всех пар эквивалентных паре $<a, b>$). Теперь можно каждому целому числу поставить в соответствие вполне определённый класс эквивалентных между собой пар натуральных чисел. Множество таких классов пар натуральных чисел и можно использовать в качестве модели целых чисел. Докажем, что все аксиомы кольца выполняются в этой модели. Для этого необходимо ввести понятия сложения и умножения классов пар. Сделаем это по следующим правилам:

1) $[<a, b>] + [<c, d >] = [<a + c, b + d >]$;

2) $[<a, b>] \cdot [<c, d >] = [<ac + bd, ad + bc>]$.

Покажем, что введенные определения корректны, то есть не зависят от выбора конкретных представителей из классов пар. Иными словами, если эквивалентны пары $<a, b> \cong <a_1, b_1>$ и $<c, d > \cong <c_1, d_1 >$, то эквивалентны и соответствующие суммы и произведения $<a + c, b + d > \cong <a_1 + c_1, b_1 + d_1>$, равно как и $<ac + bd, ad +bc> \cong <a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 +b_1c_1>$.

<u>Доказательство</u>: Применим определение эквивалентности пар:

$<a, b> \cong <a_1, b_1> \Leftrightarrow a + b_1 = b + a_1$ (1),

$<c, d > \cong <c_1, d_1 > \Leftrightarrow c + d_1 = d + c_1$ (2).

Почленно сложив равенства (1) и (2), получим:

$a + b_1 + c + d_1 = b + a_1 + d + c_1$.

Все слагаемые в последнем равенстве – натуральные числа, поэтому мы в праве применить коммутативный и ассоциативный законы сложения, что приводит нас к равенству

$(a + c) + (b_1 + d_1)= (b + d) + (a_1 + c_1)$,

которое равносильно условию $<a + c, b + d > \cong <a_1 + c_1, b_1 + d_1>$.

Для доказательства корректности умножения, равенство (1) умножим на c, получим:

$$ac + b_1c = bc + a_1c.$$

Затем перепишем равенство (1) в виде $b + a_1 = a + b_1$ и умножим на d:

$$bd + a_1d = ad + b_1d.$$

Почленно сложим полученные равенства:

$$ac + bd + a_1d + b_1c = bc + ad + b_1d + a_1c,$$

что означает, что $<ac + bd, ad + bc> \cong <a_1c + b_1d, a_1d + b_1c>$ (иными словами, здесь мы доказали, что $<a, b>\cdot<c, d> \cong <a_1, b_1>,\cdot<c, d>$).

Затем ту же процедуру проделаем с равенством (2), только умножать его будем на a_1 и b_1. Получим:

$$a_1c + a_1d_1 = a_1d + a_1c_1$$

$$b_1d + b_1c_1 = b_1c + b_1d_1,$$

откуда

$$a_1c + b_1d + b_1c_1 + a_1d_1 = a_1d + b_1d + b_1c_1 + a_1c_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow <a_1c + b_1d, a_1d + b_1c> \cong <a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1>$$

(здесь мы доказали, что $<a_1, b_1>\cdot<c, d> \cong <a_1, b_1>,\cdot<c_1, d_1>$). Пользуясь свойством транзитивности отношения эквивалентности пар, приходим к требуемому равенству $<ac + bd, ad + bc> \cong <a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1>$ равносильному условию

$$<a, b>\cdot<c, d> \cong <a_1, b_1>,\cdot<c_1, d_1>.$$

Таким образом, корректность введённых определений доказана.

Далее непосредственно проверяются все свойства колец: ассоциативный закон сложения и умножения для классов пар, коммутативный закон сложения, дистрибутивные законы. Приведем в качестве примера доказательство ассоциативного закона сложения:

$$<a, b> + (<c, d> + <m, n>) = <a, b> + <c + m, d + n> = <a + (c + m), b + (d + n)>.$$

Так как все компоненты пар числа натуральные

$$<a + (c + m), b + (d + n)> = <(a + c) + m), (b + d) + n)> =$$

$$= <(a + c), (b + d)> + <m, n)> = (<a, b> + <c, d>) + <m, n>.$$

Остальные законы проверяются аналогично (заметим, что полезным приёмом может служить отдельное преобразование левой и правой части требуемого равенства к одному и тому же виду).

Необходимо также доказать наличие нейтрального элемента по сложению. Им может служить класс пар вида $[<c, c>]$. Действительно,

$[<a, b>] + [<c, c>] = [<a + c , b + c>] \cong [<a, b>]$, так как

$a + c + b = b + c + a$ (справедливо для любых натуральных чисел).

Кроме того, для каждого класса пар $[<a, b>]$ имеется противоположный к нему. Таким классом будет класс $[<b, a >]$. Действительно,

$[<a, b>] + [<b, a >] = [<a + b, b + a>] = [<a + b, a + b >] \cong [<c, c>]$.

Можно также доказать, что введённое множество классов пар есть коммутативное кольцо с единицей (единицей может служить класс пар $[<c^{/}, c>]$), и что все условия определений операций сложения и умножения для натуральных чисел, сохраняются и для их образов в данной модели. В частности, следующий элемент для натуральной пары разумно ввести по правилу:

$[<a, b>]^{/} = [<a^{/}, b>]$.

Проверим, пользуясь данным правилом, справедливость условий С1 и С2 (из определения сложения натуральных чисел). Условие С1 ($a + 1 = a^{/}$) в данном случае перепишется в виде:

$[<a, b>] + [<c^{/}, c>] =[<a, b>]^{/} = [<a^{/}, b>]$. Действительно,

$[<a, b>] + [<c^{/}, c>] = [<a + c^{/}, b + c>] = [<a^{/}, b>]$, так как

$a + c^{/} +b = a + b + 1 + c = b + c + a +1 = b + c + a^{/}$

(ещё раз напомним, что все компоненты натуральные).

Условие С2 будет иметь вид:

$[<a, b>] + [<c, d>]^{/} = ([<a, b>] + [<c, d>])^{/}$.

Преобразуем отдельно левую и правую части данного равенства:

$[<a, b>] + [<c, d>]^{/} = [<a, b>] + [<c^{/}, d>] = [<a + c^{/}, b + d>]^{/}$.

$([<a, b>] + [<c, d>])^{/} = [<a + c, b + d>]^{/} =[<(a + c)^{/}, b + d>] =[<a + c^{/}, b + d>]$.

Таким образом, мы видим, что левые и правые части равны, значит условие С2 справедливо. Доказательство условия У1 предоставляется читателю. условие У2 является следствием дистрибутивного закона.

Итак, модель кольца целых чисел построена, а, следовательно, аксиоматическая теория целых чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория натуральных чисел.

Свойства операций над целыми числами:

1) $a \cdot 0 = 0$

2) $a \cdot (-b) = -a \cdot b = -(ab)$

3) $-(-a) = a$

4) $(-a) \cdot (-b) = ab$

5) $a \cdot (-1) = -a$

6) $a - b = -b + a = -(b - a)$

7) $-a - b = -(a + b)$

8) $(a - b) \cdot c = ac - bc$

9) $(a - b) - c = a - (b + c)$

10) $a - (b - c) = a - b + c$.

Доказательства всех свойств повторяют доказательства соответствующих свойств для колец.

1) $a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a$, то есть $a \cdot 0$ является нейтральным элементом по сложению.

2) $a \cdot (-b) + ab = a(-b + b) = a \cdot 0 = 0$, то есть элемент $a \cdot (-b)$ является противоположным к элементу $a \cdot b$.

3) $(-a) + a = 0$ (по определению противоположного элемента). Аналогично $(-a) + (-(-a)) = 0$. Приравнивая левые части равенств и применяя закон сокращения, получим $-(-a) = a$.

4) $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = ab$.

5) $a \cdot (-1) + a = a \cdot (-1) + a \cdot 1 = a \cdot (-1 + 1) = a \cdot 0 = 0$

$a \cdot (-1) + a = 0$

$a\cdot(-1) = -a$.

6) По определению разности $a - b$ есть такое число x, что $a = x + b$. Прибавляя к правой и левой части равенства $-b$ слева и пользуясь коммутативным законом, получаем первое равенство.

$-b + a + b - a = -b + b + a - a = 0 + 0 = 0$, что доказывает второе равенство.

7) $-a - b = -1\cdot a - 1\cdot b = -1\cdot(a + b) = -(a + b)$.

8) $(a - b)\cdot c = (a + (-1)\cdot b)\cdot c = ac + (-1)\cdot bc = ac - bc$

9) $(a - b) - c = x$,

$a - b = x + c$,

$a = x + b + c$

$a - (b + c) = x$, то есть

$(a - b) - c = a - (b + c)$.

10) $a - (b - c) = a + (-1)\cdot(b - c) = a + (-1\cdot b) + (-1)\cdot(-c) = a - 1\cdot b + 1\cdot c = = a - b + c$.

Задания для самостоятельного решения

№ 2.1. В правом столбце таблицы найти пары эквивалентные парам, приведённым в левом столбце таблицы.

а) <7, 5>	1) <5, 7>
б) <2, 3>	2) <1, 10>
в) <10, 10>	3) <5, 4>
г) <6, 2>	4) <15, 5>
	5) <1, 5>
	6) <9, 9>

Для каждой пары указать ей противоположную.

№ 2.2. Вычислить

а) [<1, 5>] + [<3, 2>]; б)[<3, 8>] + [<4, 7>];

в) [<7, 4>] – [<8, 3>]; г) [<1, 5>] – [<3, 2>];

д) [<1, 5>] · [<2, 2>]; е) [<2, 10>]· [<10, 2>].

№ 2.3. Для модели целых чисел, описанной в данном разделе, проверить коммутативный закон сложения, ассоциативный и коммутативный законы умножения, дистрибутивные законы.

2.2. РАСПОЛОЖЕННЫЕ КОЛЬЦА И ИХ ОБЩИЕ СВОЙСТВА. РАСПОЛОЖЕННОСТЬ КОЛЬЦА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Кольцо, в котором введено отношение «быть больше нуля» (обозначается $a > 0$), называется *расположенным кольцом*, если для любых элементов этого кольца выполняются два условия:

1) справедливо одно и только одно из условий

$a > 0 \vee -a > 0 \vee a = 0$

2) $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0 \wedge ab > 0$.

Множество, в котором введено некоторое отношение порядка – нестрогого (рефлексивно, антисимметрично и транзитивно), либо строгого (антирефлексивно и транзитивно) называется *упорядоченным*. Если выполняется закон о трихотомии, то множество называется *линейно* упорядоченным. Если мы будем рассматривать не произвольное множество, а некоторую алгебраическую систему, например, кольцо или поле, то для упорядоченности такой системы вводятся также требования монотонности относительно вводимых в данной системе (алгебраической структуре) операций. Так *упорядоченным кольцом/полем* называется ненулевое кольцо/поле, в котором введено отношение линейного порядка ($a > b$), удовлетворяющее двум условиям:

1) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$;

2) $a > b, c > 0 \Rightarrow a c > b c$;

Теорема 1. Всякое расположенное кольцо является упорядоченной системой (кольцом).

Действительно, если в кольце введено отношение «быть больше 0», то можно ввести и отношение больше для двух произвольных элементов, если положить, что

$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

Такое отношение является отношением строгого, линейного порядка.

Данное отношение «больше» является антирефлексивным, так как условие $a > a$ равносильно условию $a - a > 0$, последнее же противоречит тому, что

$a - a = 0$ (по первому условию расположенного кольца элемент не может быть одновременно больше 0 и равен 0). Таким образом, утверждение $a > a$ является ложным для любого элемента a, поэтому отношение антирефлексивно.

Докажем транзитивность: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. По определению, из условия теоремы следует, что $a - b > 0$ и $b - c > 0$. Складывая эти два элемента большие нуля, мы снова получим элемент больший нуля (согласно второму условию расположенного кольца):

$a - b + b - c = a - c > 0$.

Последнее же означает, что $a > c$. Таким образом, введённое отношение является отношением строгого порядка. Более того, данное отношение является отношением линейного порядка, то есть для множества натуральных чисел справедлива *теорема о трихотомии*:

Для любых двух натуральных чисел справедливо одно и только одно из следующих трёх утверждений:

1) $a > b$

2) $b > a$

3) $a = b$.

Действительно (в силу первого условия расположенного кольца) для числа $a - b$ справедливо одно и только одно из условий:

1) $a - b > 0 => a > b$

2) $-(a - b) = b - a > 0 => b > a$

3) $a - b = 0 => a = b$.

Свойства монотонности также выполняются для любого расположенного кольца. Действительно

1) $a > b => a - b > 0 => a + c - c - b > 0 => a + c > b + c$;

2) $a > b \wedge c > 0 => a - b > 0 =>$ (по второму условию расположенного кольца) $(a - b)c > 0 => ac - bc > 0 => ac > bc$.

Таким образом, мы доказали, что любое расположенное кольцо является упорядоченным кольцом (упорядоченной системой).

Для всякого расположенного кольца будут также справедливыми следующие свойства:

а) $a + c > b + c \Rightarrow a > b$;

б) $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$;

в) $a > b \wedge c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$;

Те же свойства имеют место и для других знаков $<$, $\leq$, $\geq$.

Докажем, например, свойство (в). По определению, из условия $a > b$ следует, что $a - b > 0$, а из условия $c < 0$ ($0 > c$) следует, что $0 - c > 0$, а значит и число $-c > 0$, перемножим два положительных числа $(a - b)\cdot(-c)$. Результат также будет положительным по второму условию расположенного кольца, то есть

$(a - b)\cdot(-c) > 0 \Rightarrow -ac + bc > 0 \Rightarrow bc - ac > 0 \Rightarrow bc > ac \Rightarrow ac < bc$,

что и требовалось доказать.

г) $aa = a^2 \geq 0$;

<u>Доказательство</u>: По первому условию расположенного кольца либо $a > 0$, либо $-a > 0$, либо $a = 0$. Рассмотрим эти случаи отдельно:

1) $a > 0 \Rightarrow a\cdot a > 0$ (по второму условию расположенного кольца) $\Rightarrow a^2 > 0$.

2) $-a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > 0$, но по свойству кольца $(-a)(-a) = a\cdot a = a^2 > 0$.

3) $a = 0 \Rightarrow a\cdot a = a^2 = 0$.

Таким образом, во всех трех случаях a^2 либо больше нуля, либо равно 0, что как раз и означает, что $a^2 \geq 0$ и свойство доказано (заметим, что мы также доказали, что *квадрат элемента расположенного кольца равен 0 тогда и только тогда, когда сам элемент равен 0*).

д) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

<u>Доказательство</u>: Предположим противное ($ab = 0$, но ни a, ни b нулю не равны). Тогда для a возможны только два варианта, либо $a > 0$, либо $-a > 0$ (вариант $a = 0$ исключен нашим предположением). Каждый из этих двух случаев распадается еще на два случая в зависимости от b (либо $b > 0$, либо $-b > 0$). Тогда возможны 4 варианта:

1) $a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$;

2) $-a > 0, b > 0 \Rightarrow ab < 0$;

3) $a > 0, -b > 0 \Rightarrow ab < 0$;

4) $-a > 0 -b > 0 \Rightarrow ab > 0$.

Как видим, каждый из этих случаев противоречит условию $ab = 0$. Свойство доказано.

Последнее свойство означает, что расположенное кольцо является областью целостности, что также является обязательным свойством упорядоченных систем.

Теорема 1 показывает, что любое расположенное кольцо является упорядоченной системой. Верно и обратное – любое упорядоченное кольцо является расположенным. Действительно, если в кольце есть отношение $a > b$ и любые два элемента кольца сравнимы между собой, то и 0 сравним с любым элементом a, то есть либо $a > 0$, либо $a < 0$, либо $a = 0$, что почти точно совпадает с первым условием расположенного кольца, требуется только доказать, что условие $a < 0$ равносильно в упорядоченном кольце условию $-a > 0$. Для того, чтобы доказать последнее, применим свойство монотонности упорядоченных систем: к правой и левой части неравенства $a < 0$ прибавим $-a$, в результате чего получим требуемое.

Второе условие расположенного кольца вытекает из свойств монотонности и транзитивности:

$a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0 + b = b > 0 \Rightarrow a + b > 0$,

$a > 0, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0 \cdot b = 0 \Rightarrow ab > 0$.

Теорема 2. Кольцо целых чисел является расположенным кольцом (упорядоченной системой).

<u>Доказательство:</u> Воспользуемся определением 2 кольца целых чисел (см. 2.1). Согласно данному определению любое целое число это либо натуральное число (число n задаётся как $[<n^{/}, 1>]$, либо противоположное натуральному ($-$ n соответствует классу $[<1, n^{/}>]$, либо 0 (класс $[<1, 1>]$). Введём определение «быть больше нуля» для целых чисел по правилу:

$a > 0 \Leftrightarrow a \in N$

Тогда первое условие расположенного кольца автоматически выполняется для целых чисел: если a – натуральное, то оно больше 0, если a – противоположное натуральному, то –a – натуральное, то есть тоже больше 0, возможен также вариант a = 0, который также делает истинной дизъюнкцию в первом условии расположенного кольца. Справедливость второго условия расположенного кольца следует из того, что сумма и произведение двух натуральных чисел (целых чисел больше нуля) есть снова число натуральное, а значит и большее нуля.

Таким образом, все свойства расположенных колец автоматически переносятся на все целые числа. Кроме того, для целых чисел (но не для произвольных расположенных колец) справедлива теорема о дискретности:

Теорема о дискретности. Между двумя соседними целыми числами нельзя вставить никакое целое число:

$(\forall\ a, x \in \mathbf{Z})\ \overline{a < x < a+1}$.

<u>Доказательство</u>: рассмотрим все возможные случаи для a, и будем предполагать противное, то есть, что существует такой x, что

$a < x < a + 1$.

1) если a – натуральное число, то и a + 1 – натуральное. Тогда по теореме о дискретности для натуральных чисел между a и $a^{/} = a + 1$ нельзя вставить никакое натуральное число x, то есть x, во всяком случае, не может быть натуральным. Если предположим, что x = 0, то наше предположение о том, что

$a < x < a + 1$

приведет нас к условию $a < 0 < a + 1$ (здесь мы просто подставили x = 0), откуда видим, что $a < 0$, что противоречит тому, что a – натуральное. Если x не натуральное и не 0, но x – целое, значит –x – натуральное, тогда $x < 0$. При этом, согласно нашему предположению, $a < x$, что по свойству транзитивности опять приводит к тому, что $a < 0$, что невозможно, так как a – натуральное. Таким образом, для натуральных a утверждение $a < x < a + 1$ всегда ложно, и теорема справедлива.

2) $a = 0$. Тогда $a + 1 = 1$. Если выполняется условие $a < x < a + 1$, то мы получим $0 < x < 1$, то есть с одной стороны x – натуральное (целое, большее нуля), а с другой стороны x меньше 1, что невозможно для натуральных чисел. Таким образом, для нуля наша теорема справедлива.

3) a – отрицательно ($-a > 0$), тогда $a + 1 \le 0$. Если $a + 1 < 0$, то умножая условие $a < x < a + 1$ на –1 получим:

$$-a-1 < -x < -a,$$

то есть приходим к ситуации рассмотренной в первом случае (так как и $-a-1$, и $-a$ натуральные), откуда $-x$ не может быть целым числом, а значит и x – не может быть целым. Ситуация, когда $a + 1 = 0$, означает, что $a = -1$, то есть

$$-1 < x < 0.$$

Умножением данного неравенства на (–1), приходим к случаю 2. Таким образом во всех ситуациях теорема справедлива.

Терема Архимеда. Для любого целого числа a и целого $b > 0$ существует такое натуральное n, что $a < bn$.

Для натурального a теорема уже была доказана, так как условие $b > 0$ означает натуральность числа b. Для $a \le 0$ теорема также очевидна, так как правая часть bn есть число натуральное, то есть также больше нуля.

В кольце целых чисел (как и в любом расположенном кольце) можно ввести понятие модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}.$$

Справедливы свойства модулей:

1) $|a + b| \le |a| + |b|$;

2) $|a - b| \ge |a| - |b|$;

3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

<u>Доказательство:</u> 1) Отметим, что из определения очевидно, что $|a|$ есть величина всегда неотрицательная (в первом случае $|a| = a \ge 0$, во втором $|a| = -a$, но $a < 0$, откуда $-a > 0$). Также справедливы неравенства $|a| \ge a$, $|a| \ge -a$ (модуль

равен соответствующему выражению, если оно неотрицательно, и больше его, если оно отрицательно). Аналогичные неравенства справедливы и для b: $|b| \geq b$, $|b| \geq -b$. Складывая соответствующие неравенства и применяя свойство (б) расположенных колец, получаем

$|a| + |b| \geq a + b$ $\qquad$ $|a| + |b| \geq -a - b$.

Согласно определению модуля

$$|a + b| = \begin{cases} a+b, & a+b \geq 0 \\ -a-b & a+b < 0 \end{cases},$$

но оба выражения в правой части равенства, как показано выше, не превосходят $|a| + |b|$, что доказывает первое свойство модулей.

2) Заменим в первом свойстве a на a – b. Получим:

$|a - b + b| \leq |a - b| + |b|$

$|a| \leq |a - b| + |b|$

Перенесём $|b|$ из правой части в левую с противоположным знаком

$$|a| - |b| \leq |a - b| \Rightarrow |a - b| \geq |a| - |b|.$$

Доказательство свойства 3 предоставляется читателю.

<u>Задача:</u> Решить в целых числах уравнение

$2y^2 + 3xy - 2x^2 + x - 2y = 5$.

<u>Решение</u>: Разложим левую часть на множители. Для этого представим слагаемое $3xy = -xy + 4xy$

$2y^2 + 3xy - 2x^2 + x - 2y = 2y^2 - xy + 4xy - 2x^2 + x - 2y =$

$= y(2y - x) + 2x(2y - x) - (2y - x) = (y + 2x - 1)(2y - x)$.

Таким образом, наше уравнение может быть переписано в виде

$(y + 2x - 1)(2y - x) = 5$.

Поскольку нам требуется решить его в целых числах, x и y должны быть числами целыми, а значит и множители в левой части нашего уравнения тоже являются числами целыми. Число же 5 в правой части нашего уравнения может быть представлено как произведение целых множителей только 4 способами:

$5 = 5\cdot1 = 1\cdot5 = -5\cdot(-1) = -\cdot1\cdot(-5)$. Поэтому возможны следующие варианты:

1) $\begin{cases} y+2x-1=5 \\ 2y-x=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y+2x-1=1 \\ 2y-x=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y+2x-1=-5 \\ 2y-x=-1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y+2x-1=-1 \\ 2y-x=-5 \end{cases}$

Среди перечисленных систем только (4) имеет целочисленное решение:

$x = 1$, $y = -2$.

Задания для самостоятельного решения

№ 2.4. Для элементов a, b, c, d произвольного расположенного кольца доказать свойства:

а) $a + c > b + c \Rightarrow a > b$; б) $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

№ 2.5. Решить в целых числах уравнения:

а) $y^2 - 2xy - 2x = 6$;

б) $2x^2 - 11xy - 12y^2 = 17$;

в) $35xy + 5x - 7y = 1$;

г) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$;

д) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} = 1$;

е) $xy + 3x - 5y + 3 = 0$;

ж) $2xy - 3y^2 - 4y + 2x = 2$;

з) $xy^2 + x = 48$;

и) $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = y^2$;

к) $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$

№ 2.6. Найдите четырёхзначное число, являющееся точным квадратом и такое, что его первые две цифры равны между собой и последние две цифры равны между собой.

№ 2.7. Найдите двузначное число, равное сумме чисел его десятков и квадрата его единиц.

№ 2.8. Найдите двузначное число, которое равно удвоенному произведению его цифр.

№ 2.9. Докажите, что разность между трёхзначным числом и числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке не может быть квадратом натурального числа.

№ 2.10. Найдите все натуральные числа, оканчивающиеся на 91, которые после вычёркивания этих цифр уменьшаются в целое число раз.

№ 2.11. Найдите двузначное число, равное квадрату его единиц, сложенному с кубом его десятков.

№ 2.12. Найдите шестизначное число, начинающееся с цифры 2, которое от перестановки этой цифры в конец числа увеличивается в 3 раза.

№ 2.13. На доске записано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое всех этих чисел равно – 3, среднее арифметическое положительных из них равно 4, а среднее арифметическое отрицательных из них равно – 8. Сколько чисел написано на доске? Каких чисел больше, положительных или отрицательных? Каково максимально возможное число положительных чисел?

№ 2.14. Может ли частное трехзначного числа и суммы его цифр быть равно 89? Может ли это частное быть равно 86? Каково максимально возможное значение данного частного?

2.3. ПОЛЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Следующий шаг в обобщении понятия числа связан с операцией деления. В множестве целых чисел не всегда найдется число x такое, чтобы ax = b. В общем случае решение такого уравнения можно формально записать в виде $x = b \cdot a^{-1}$, однако, это выражение в рамках целых чисел часто не имеет никакого смысла. Множество целых чисел пополняется решениями таких уравнений (при этом требуется, чтобы $a \neq 0$). Эти решения принято записывать в виде дробей $b \cdot a^{-1} = \frac{b}{a}$ и называть их рациональными числами (от латинского ratio – отношение). В данном случае числа a и b являются целыми. Часто требуют, чтобы a было натуральным (если это не так, то уравнение ax = b можно просто умножить на –1), тогда уже не требуется дополнительно обговаривать, что $a \neq 0$. Число b называется числителем дроби, а число a – знаменателем.

Операции над рациональными числами выполняются по правилам:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Несложно проверить, что описанное множество дробей обладает структурой поля. Данное поле называется полем рациональных чисел и обозначается символом **Q**. Любое целое число также является рациональным, исходя из соотношения $a = \frac{a}{1}$. Таким образом, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Возможны также и иные подходы к построению понятия поля рациональных чисел, эквивалентные данному. В частности можно определить поле рациональных чисел как минимальное поле, содержащее в себе в качестве подкольца кольцо целых чисел.

Определение 1. Полем рациональных чисел называется минимальное поле, содержащее в себе кольцо целых чисел.

Определение 2. Полем рациональных чисел называется поле, элементами которого являются все возможные решения уравнения $a \cdot x = b$, где a и b – произвольные целые числа, $a \neq 0$.

Теорема 1. Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство: Обозначим через Q_1 поле рациональных чисел в смысле определения 1, а через Q_2 в смысле определения 2. В начале докажем, что Q_2 включается в Q_1. Действительно, все элементы Q_2 есть решения уравнения $a \cdot x = b$, а значит их можно представить в виде $b \cdot a^{-1}$. a, b – целые числа, значит они принадлежат Q_1, далее $a \neq 0$, а Q_1 – поле, значит $a^{-1} \in Q_1$, а значит и их произведение, то есть произвольный элемент из Q_2 также принадлежит Q_1.

Таким образом, $Q_2 \subseteq Q_1$.

С другой стороны Q_2 содержит в себе кольцо целых чисел, так как любое целое число n всегда является решением уравнения

$1 \cdot x = n$,

а значит $Q_1 \subseteq Q_2$, так как Q_1 является минимальным полем, содержащим в себе кольцо целых чисел, то есть $Q_2 = Q_1$, теорема доказана.

Иногда в качестве дополнительного требования к определению рациональных дробей выдвигают то, чтобы числитель и знаменатель были числами взаимно простыми (то есть a и b не должны делиться одновременно ни на какое натуральное число кроме 1). В таком случае дробь $\frac{b}{a}$ называется несократимой. Данное различие в определениях не приводит к расширению или сужению рассматриваемого множества, так как во множестве рациональных чисел имеет место закон сокращения: $\frac{bc}{ac} = \frac{b}{a}$ (разумеется, *c* не равно нулю, иначе первая дробь не имеет смысла). Действительно, если дробь $\frac{b}{a}$ является решением уравнения $ax = b$, то умножая обе части этого уравнения на c, получаем уравнение $acx = bc$, равносильное исходному (при $c \neq 0$), то есть $\frac{b}{a}$ будет и решением нового уравнения. Согласно же введённому определению, решением уравнения $acx = bc$ будет дробь $\frac{bc}{ac}$. В свою очередь, из свойств полей известно, что решение такого уравнения единственно (при $ac \neq 0$), а, следовательно, $\frac{bc}{ac} = \frac{b}{a}$.

Построенное определение поля рациональных чисел является аксиоматическим (аксиомами являются все аксиомы поля, а первичными терминами понятия отношений, дробей или в других обозначениях – поле частных области целостности).

Теорема 2. Аксиоматическая теория рациональных чисел непротиворечива.

Для доказательства необходимо построить модель, пользуясь заведомо непротиворечивой теорией (в нашем случае это будет аксиоматическая теория целых чисел).

Согласно определению 2, каждое рациональное число представимо в виде решения уравнения, а значит $q = ba^{-1}$. Сопоставим каждому рациональному числу q соответствующую пару <b, a>, где a не равно 0. Недостатком данного соответствия вновь является его неоднозначность. В частности, числу 2 соответствуют и пара <2, 1 > и пара <4, 2> и множество других. Будем говорить, что пара <a, b> эквивалентна паре <c, d> и записывать это как <a, b> ≅ <c, d>, если $a \cdot d = b \cdot c$.

Введённое отношение является отношением эквивалентности, то есть рефлексивно симметрично и транзитивно.

Как и всякое отношение эквивалентности, введённое отношение порождает разбиение множества всевозможных пар целых чисел, вторая компонента которых отлична от нуля на классы эквивалентности, которые мы будем обозначать как [<a, b>]. Теперь каждому рациональному числу можно однозначно поставить в соответствие определённый класс эквивалентных между собой пар чисел. Теперь покажем, что получена модель поля рациональных чисел, то есть что построенное множество классов пар является полем. Для этого необходимо ввести понятия сложения и умножения классов пар. Сделаем это по следующим правилам:

1) [<a, b>] + [<c, d >] = [<ad + bc, b·d >];

2) [<a, b>] · [<c, d >] = [<ac, bd>].

Покажем, что введенные определения корректны, то есть не зависят от выбора конкретных представителей из классов пар. Иными словами, если пара $<a, b> \cong <a_1, b_1>$ и $<c, d> \cong <c_1, d_1>$, то $<ad + bc, bd> \cong <a_1d_1 + b_1c_1, b_1d_1>$ и $<a\cdot c, b\cdot d> \cong <a_1\cdot c_1, b_1 \cdot d_1>$. Для доказательства распишем условие $<a, b> \cong <a_1, b_1>$ как $a\cdot b_1 = b\cdot a_1$, а $<c, d> \cong <c_1, d_1>$ как $c\cdot d_1 = d\cdot c_1$. Почленно умножив полученные равенства получим, что $<ac, bd> \cong <a_1c_1, b_1d_1>$. Далее умножим первое равенство на dd_1, а второе на bb_1:

$a\cdot b_1\, dd_1 = b\cdot a_1\, dd_1$

$c\cdot d_1\, bb_1 = d\cdot c_1\, bb_1$.

Складывая полученные равенства, получим:

$(ad + bc)b_1d_1 = (a_1d_1 + b_1c_1)bd$

Таким образом, корректность введённых определений доказана.

Далее проверяются все свойства полей: замкнутость относительно данных операций (вторая компонента не равна нулю в обоих случаях, так как целые числа область целостности), ассоциативный закон сложения и умножения для классов пар, коммутативный закон сложения, дистрибутивные законы, а также то, что класс пар вида $[<0, c>]$, есть нейтральный элемент по сложению, а противоположным к классу пар $[<a, b>]$ является класс $[<-a, b>]$, роль 1 играет класс пар вида $[<c, c>]$, а обратным к классу пар $[<a, b>]$ является класс $[<b, a>]$ (для ненулевого класса, то есть класса где а отлично от 0).

Таким образом, модель поля рациональных чисел построена, а, следовательно, аксиоматическая теория рациональных чисел непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория целых чисел. Построенное поле содержит в себе кольцо целых чисел, если каждому целому числу а поставить в соответствие класс пар $[<a, 1>]$. Элементарные вычисления показывают, что все операции при этом сохраняются.

Так как всякое поле является кольцом, для доказательства упорядоченности поля рациональных чисел достаточно доказать то, что оно является расположенным кольцом.

Теорема 1. Поле рациональных чисел является расположенным кольцом.

Доказательство: Любое рациональное число есть отношение $\frac{b}{a}$ (a, b $\in$ **Z**, a $\neq$ 0). Введём определение «быть больше нуля» для рациональных чисел по правилу

$\frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow ab > 0$.

Тогда число ab является целым, а целые числа – расположенное кольцо, поэтому имеет место одно и только одно из следующих условий: либо ab > 0, либо – ab > 0, либо ab = 0. Из первого условия следует, что $\frac{b}{a} > 0$, из второго, что $-\frac{b}{a} > 0$, из третьего, в силу того, что a $\neq$ 0, а кольцо целых чисел есть область целостности, следует, что b = 0, а значит и дробь $\frac{b}{a} = 0$. Таким образом, первое условие расположенного кольца выполняется для всех рациональных чисел. Докажем справедливость второго условия расположенного кольца. Для простоты будем считать, что знаменатель любой дроби есть число натуральное (в противном случае и числитель, и знаменатель можно домножить на – 1). Пусть $\frac{a}{b} > 0$ и $\frac{c}{d} > 0$, докажем, что $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} > 0$, то есть из условий ab > 0 и cd > 0, требуется доказать, что (ad + bc)bd > 0. Для этого отметим, что квадрат любого целого числа неотрицателен, а значит квадрат знаменателя положителен. Умножим первое неравенство ab > 0 на d^2, а второе неравенство cd > 0 на b^2 и сложим полученные результаты (здесь речь идёт о неравенствах в целых числах, поэтому мы можем пользоваться расположенностью кольца целых чисел). Получим $abd^2 + cdb^2 > 0$, откуда, вынося bd за скобки, на основании дистрибутивного закона имеем (ad + bc)bd > 0.

Пусть теперь вновь $\frac{a}{b} > 0$ и $\frac{c}{d} > 0$, докажем, что $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} > 0$. Для этого достаточно умножить целое число ab > 0 на целое число cd > 0, получим

acbd > 0, то есть $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} > 0$.

Таким образом, все условия расположенного кольца выполняются для любых двух рациональных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, а значит поле рациональных чисел является упорядоченным, а также все свойства расположенных колец выполняются также и для рациональных чисел.

В частности $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0$, то есть $\frac{ad-bc}{bd} > 0$. Если считать, что знаменатели являются числами натуральными, то это условие эквивалентно условию ad – bc > 0 или ad > bc.

Заметим, что множество рациональных чисел свойством дискретности не обладает.

Определение: Упорядоченное множество называется *всюду плотным* если между любыми двумя его элементами существует ещё один его элемент из того же множества.

Теорема 2. Поле рациональных чисел является всюду плотным множеством, то есть для любых рациональных чисел $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ существует рациональное число $\frac{m}{n}$, такое что $\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{c}{d}$.

<u>Доказательство</u>: Действительно, одно из таких чисел $\frac{m}{n}$ можно вычислить по формуле

$$\frac{m}{n} = \frac{ad+bc}{2bd}.$$

Терема 3 (Архимеда). Для любого рационального числа $\frac{a}{b}$ и рационального $\frac{c}{d} > 0$ существует такое натуральное n, что $\frac{a}{b} < n\frac{c}{d}$.

<u>Доказательство</u>: Вновь будем считать, что знаменатели натуральные. Требуемое неравенство равносильно неравенству

ad < nbc

где ad – целое, а bc – также целое, большее нуля ($\frac{c}{d} > 0$, значит числитель c больше нуля, если знаменатель натуральный, а b – также больше 0, так как b – знаменатель). Для целых чисел теорема Архимеда уже была доказана, а значит она справедлива и для любых рациональных чисел.

Заметим, что если число не представлено в виде отношения двух целых чисел, то было бы ошибкой считать, что оно не является рациональным. существуют различные способы записи рациональных чисел, и некоторые числа, которые на первый взгляд могут показаться иррациональными, на самом деле, после осуществления некоторых преобразований оказываются рациональными. Например, число 2,1324242424… = 2,13(24) – бесконечная периодическая дробь, является числом рациональным (повторяющиеся цифры, заключённые в скобки называются *периодом* данной дроби, а цифры, стоящие после запятой, но до скобок, называются *предпериодом*). Установить рациональность данного числа позволяет следующая теорема.

Теорема 4. Любую периодическую десятичную дробь можно представить обыкновенной дробью (любая периодическая дробь является рациональным числом).

<u>Доказательство:</u> Пусть число имеет вид $a_0,a_1a_2\ldots a_m(b_1\ldots b_k)$ (m цифр в предпериоде и k цифр в периоде).

$a_0,a_1\, a_2\ldots a_m(b_1\ldots b_k) =$

$$= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_m}{10^m} + \frac{b_1}{10^{m+1}} + \frac{b_2}{10^{m+2}} + \ldots + \frac{b_k}{10^{m+k}} + \frac{b_1}{10^{m+k+1}} + \ldots + \frac{b_k}{10^{m+2k}} + \ldots$$

Рассмотрим отдельно сумму

$$\frac{b_1}{10^{m+1}} + \frac{b_2}{10^{m+2}} + \ldots + \frac{b_k}{10^{m+k}} + \frac{b_1}{10^{m+k+1}} + \frac{b_2}{10^{m+k+2}} + \ldots + \frac{b_k}{10^{m+2k}} + \ldots = \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{m+k}} + \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{m+2k}}$$

$$+ \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{m+3k}} \ldots$$

(выражения в числителях правой части надо, разумеется, понимать как десятичную запись целого числа, соответствующего выражению в периоде, а не как произведение). Она образует бесконечно убывающую геометрическую про-

грессию с первым членом $\frac{b_1}{10^{m+1}}+\frac{b_2}{10^{m+2}}+\ldots+\frac{b_k}{10^{m+k}}$ и периодом $\frac{1}{10^k}$. По известной формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (S = $\frac{b_1}{1-q}$)

$$\frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{m+k}}+\frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{m+2k}}+\frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{m+3k}}+\ldots=\frac{\frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{m+k}}}{1-\frac{1}{10^k}}=\frac{b_1b_2\ldots b_k}{(10^k-1)10^m}$$

Таким образом, мы представили наше число

$a_0,a_1\ a_2\ldots a_m(b_1\ldots b_k) = a_0 + \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_m}{10^m}+\frac{b_1b_2\ldots b_k}{(10^k-1)10^m}$ в виде суммы рациональных чисел, которая, в свою очередь, сама является рациональным числом.

Заметим, что число $10^k - 1$ представляет собой k девяток, а умножение на 10^m соответствует дописыванию m нулей. Отсюда получаем ***правило перевода периодических дробей в обыкновенные***: *сначала отделяется непериодическая часть числа (перевод конечных десятичных дробей в обыкновенные не представляет сложности и изучается в школьном курсе), при переводе периодической части в числитель записывают цифры периода, а в знаменатель – столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей, сколько цифр в предпериоде.*

Пример 1: $2,3(42) = 2 + \frac{3}{10} + \frac{42}{990} = 2\frac{339}{990}$.

Число $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$ также является рациональным, так как

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{1+2\sqrt{2+2}}-\sqrt{2}=\sqrt{1^2+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}-\sqrt{2}=$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}-\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-\sqrt{2}=1\in\mathbf{Q}.$$

При выяснении вопроса о рациональности выражений, содержащих радикалы полезно применять следующую теорему, известную из курса алгебры.

Теорема 5. Если рациональное число $\frac{p}{q}$ (где p и q – взаимно простые целые числа) является корнем многочлена с целыми коэффициентами f(x), то p является делителем свободного члена, а q – делителем старшего коэффициента.

Приведем пример применения данной теоремы.

Пример 2: Доказать, что число $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ – рационально.

Решение: Обозначим данное число буквой а и возведём обе части полученного равенства в куб.

$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=a$

$(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}})^3=a^3$

$10+6\sqrt{3}+3(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}})^2\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}+3\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}})^2+10-6\sqrt{3}=a^3$

$20+3\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}})=a^3$

Заметим, что выражение в скобках равно исходному числу, то есть а. Заменим его, а также запишем выражение перед скобками под общим корнем и применим формулу сокращённого умножения:

$20+3\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})(10-6\sqrt{3})}\,a=a^3$

$20+3\sqrt[3]{10^2-(6\sqrt{3})^2}\,a=a^3$

$20+3\sqrt[3]{100-108}\,a=a^3$

$20+3\sqrt[3]{-8}\,a=a^3$

$20-6a=a^3$

$a^3+6a-20=0.$

По теореме 5, если данный многочлен имеет рациональный корень, то его числитель будет делителем числа 20 (это могут быть ±1, ±2, ±4, ±5, ±10, ±20), а знаменатель – делителем старшего коэффициента, то есть в нашем случае единицы (так как знаменатель должен быть числом натуральным, единственным возможным знаменателем является 1). Непосредственной подстановкой убеждаемся, что а = 2 является корнем данного уравнения. Далее

$a^3+6a-20=a^3-8+6a-12=(a-2)(a^2+2a+4)+6(a-2)=$

$=(a-2)(a^2+2a+10)$

Второй множитель имеет отрицательный дискриминант, поэтому других действительных корней у многочлена $a^3+6a-20$ (отметим, что разложение можно было бы получить делением многочлена $a^3+6a-20$ на $a-2$). Число же $a=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ является действительным, поэтому

$$a = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} = 2 \in \mathbf{Q}.$$

Тот же результат можно было бы получить и свернув подкоренные выражения по формулам куб суммы и куб разности.

Задания для самостоятельного решения

№2.15. Доказать свойства рациональных чисел:

а) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$; б) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$.

№ 2.16. Доказать, что число рационально

а) $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

в) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

г) $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$;

д) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$;

е) $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} - \sqrt[3]{\sqrt{50}-7}$;

ж) $(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}) \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

з) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + 2\sqrt{6}$.

№ 2.17. Вычислите:

а) $\sqrt{2\sqrt[3]{5\sqrt{2\sqrt[3]{5\sqrt{2\sqrt[3]{....}}}}}}$;

б) $\sqrt{\underbrace{111...1}_{2n} - \underbrace{222...2}_{n}}$.

№ 2. 18. Представьте периодическую дробь в виде несократимого отношения двух целых чисел:

а) 0,233(37); б) 9,(387);

в) 11,(459); г) 7,4(099).

Часть 3. Действительные числа. Краткие сведения о дальнейших обобщениях понятия числа

3.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Построенного множества рациональных чисел оказывается недостаточно даже для решения некоторых простейших геометрических задач. Например диагональ единичного квадрата по теореме Пифагора равна числу, удовлетворяющему уравнению $x^2 = 2$, которое не имеет решений в поле рациональных чисел. Действительно, предположим противное: пусть рациональное число $\frac{a}{b}$ является решением уравнения $x^2 = 2$, то есть $(\frac{a}{b})^2 = 2$. Не нарушая общности, будем считать, что $\frac{a}{b}$ – несократимая дробь (в противном случае её можно было бы сократить). Так как $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$, то $a^2 = 2b^2$. Правая часть делится на 2, значит и левая делится на 2. 2 – число простое, поэтому если произведение a^2 делится на 2, то на 2 делится один из множителей, в данном случае это a. Отсюда видно, что a – чётное, то есть a=2k. Тогда

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2b^2.$$

Следовательно, $b^2 = 2k^2$, а значит и b – чётное число. Таким образом, и a, и b делятся на 2, что противоречит тому, что дробь $\frac{a}{b}$ несократимая. Противоречие показывает, что исходное предположение неверно, и значит, уравнение $x^2 = 2$ не имеет рациональных решений. Положительный корень данного уравнения принято обозначать символом $\sqrt{2}$. Это число рациональным не является. Не являются рациональными числами и бесконечные непериодические десятичные дроби (не сложно убедится, что при делении одного целого числа на другое, отличное от 0, всегда получается либо конечная, либо периодическая дробь).

Если целые числа появились в результате невозможности решать уравнения a + x = b в рамках натуральных чисел, рациональные возникли из необходимости решать уравнения ax = b, то можно подумать, что действительные числа появились как результат необходимости решать квадратные уравнения или, быть может, уравнения более высоких степеней. Однако такой подход приводит к построению системы алгебраических чисел, а не действительных. Во-первых, и в рамках действительных чисел не всякое квадратное уравнение имеет решение (например, уравнение $x^2 + 1 = 0$), а во-вторых существует весьма широких класс действительных чисел, которые не являются корнями многочленов – это трансцендентные числа. Понятие действительных чисел связано, в первую очередь, с необходимостью вычисления пределов. Хорошо известное трансцендентное число e вводится на основании второго замечательного предела (то есть предела последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$. Другое трансцендентное число π в школьном курсе, как правило, вводится как отношение длины любой окружности к ее диаметру, но и оно может быть определено через понятие предела. Ф. Виетом найдена формула

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots},$$

где в знаменателе стоит бесконечное произведение, а Г.В. Лейбниц представил $\frac{\pi}{4}$ в виде бесконечной знакочередующейся суммы

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots,$$

беря все большее число множителей в первой формуле или число слагаемых во второй, можно находить все более точные значения для π.

Рассмотрим аксиоматическую теорию действительных чисел, опираясь на понятие предела фундаментальной последовательности.

Определение. Фундаментальная последовательность – это последовательность (a_n), удовлетворяющая условию, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что модуль разности между любыми двумя членами данной последовательности с номерами, большими, чем n_0, будет меньше, чем ε.

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\square\ n_0 \in \mathbf{N})\ (\forall\ n, m > n_0)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Теорема 1. Всякая сходящаяся последовательность в нормированном поле фундаментальна, но не всякая фундаментальная последовательность сходится.

<u>Доказательство</u>: Предположим, что некоторая последовательность (u_n) имеет предел A. Тогда для любого положительного числа ε найдётся такой номер n_0, что для всех членов данной последовательности с номерами большими, чем n_0, $|x_n - A| < \varepsilon/2$.

$$|u_n - u_m| = |u_n - A + A - u_m| \le |\ u_n - A\ | + |\ A - u_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

то есть последовательность (u_n) – фундаментальна. Последовательность же, приближающая число e фундаментальна, но не имеет предела в поле рациональных чисел (Ш. Эрмит доказал, что число e даже не является алгебраическим). То же можно сказать и о последовательности десятичных приближений числа $\sqrt{2}$.

Теорема 2. Если последовательность сходится, то у неё имеется только один предел.

Для доказательства методом от противного предполагают, что имеется два разных предела и в качестве ε выбирают $|A - B|/2$. В итоге приходят к противоречию $|A - B| < |A - B|$.

Определение. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что $|x_n| < M$.

Теорема 3. Всякая фундаментальная последовательность ограничена.

<u>Доказательство</u>: Так как последовательность фундаментальна, выберем такой номер n_0, чтобы при номерах больших n_0 разность между членами была меньше 1.

$|x_n| = |x_n - x_{n0} + x_{n0}| \le |x_n - x_{n0}| + |x_{n0}| < 1 + |x_{n0}|$.

Далее находим M – наибольшее, среди модулей членов, предшествующих $|x_{n0}|$, и $1 + |x_{n0}|$. Для данного M будет выполнено условие: $|x_n| < M$, что и требовалось доказать.

Определение. Последовательность называется *стационарной*, если все её члены равны между собой. Стационарная последовательность является простейшим примером фундаментальной последовательности.

Определение. Упорядоченное поле называется *Архимедовски* упорядоченным, если для любого элемента a данного поля и любого элемента данного поля $b > 0$, существует такое натуральное число n, что

$a < bn$.

Аксиоматически множество *действительных чисел* определяется как Архимедовски упорядоченное поле, которое обладает *свойством полноты* (то есть любая фундаментальная последовательность в этом поле сходится). Эта аксиоматическая теория была построена Ш. Мерэ (1869) и Г. Кантором (1871). Поле действительных чисел обозначается символом **R**.

Моделью множества действительных чисел служит множество классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел (две последовательности принадлежат к одному классу, если разность между соответствующими членами последовательности является бесконечно малой последовательностью, то есть последовательностью сходящейся к нулю – это отношение эквивалентности также называют *конфинальностью* последовательностей).

Операция сложения фундаментальных последовательностей может быть задана по следующему правилу: суммой двух фундаментальных последовательностей $(a_n) + (b_n)$ называется последовательность, все элементы которой есть суммы соответствующих элементов из складываемых последовательностей, то есть

$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$.

Теорема 4. Сумма фундаментальных последовательностей есть снова последовательность фундаментальная.

Доказательство: Если последовательность фундаментальна, то для любого $\varepsilon/2 > 0$ существует такой номер n_0, что модуль разности между любыми двумя членами данной последовательности с номерами, большими, чем n_0, будет меньше, чем $\varepsilon/2$. Таким образом, $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$, $|b_n - b_m| < \varepsilon/2$. Тогда,

$$|a_n + b_n - (a_m + b_m)| \le |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

что справедливо при любом ε, поэтому сумма является последовательностью фундаментальной.

Аналогично вводятся понятия разности и произведения фундаментальных последовательностей. Доказательство теоремы о том, что разность фундаментальных последовательностей снова является последовательностью фундаментальной, в точности повторяет доказательство соответствующей теоремы для суммы последовательностей. Докажем теорему для умножения.

Теорема 5. Произведение фундаментальных последовательностей есть снова последовательность фундаментальная.

Доказательство: Если последовательность фундаментальна, то она ограничена. Пусть последовательность (a_n) ограничена числом M_1, а последовательность (b_n) числом M_2. Тогда в качестве ε_1 выберем $\min\{\frac{\varepsilon}{2M_1}, \frac{\varepsilon}{2M_2}\}$ и найдём такой номер, что $(|a_n - a_m| < \varepsilon_1, |b_n - b_m| < \varepsilon_1)$. Тогда,

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_m b_n + a_m b_n - a_m b_m| \le |a_n - a_m| \cdot |b_n| + |b_n - b_m|\, |a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

что справедливо при любом ε, а значит произведение является последовательностью фундаментальной.

Для классов эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей определения операций вводятся аналогично.

Для доказательства того, что полученное множество классов фундаментальных последовательностей является полем, непосредственно проверяются все законы (они справедливы для рациональных чисел, а значит и для составленных из них фундаментальных последовательностей). Последовательность называется *нулевой*, если все её члены сколь угодно малы по модулю (последовательность является бесконечно малой), то есть для любого ε, начиная с неко-

торого номера, $|a_n| < \varepsilon$. Отметим также, что сумма двух нулевых последовательностей есть последовательность нулевая, и произведение нулевой последовательности на любую фундаментальную последовательность также есть последовательность нулевая. Нулевая последовательность всегда является фундаментальной (так как она сходится к нулю, то есть имеет предел).

Интерес представляет доказательство того, что обратный элемент для любой ненулевой фундаментальной последовательности существует. Здесь необходимо ввести понятия положительной и отрицательной последовательности.

Определение. Последовательность называется *положительной*, если существует такое положительное число К и такой натуральный номер, что все члены последовательности начиная с данного номера будут больше, чем К. Последовательность называется *отрицательной*, если противоположная ей последовательность положительна.

Теорема 6. Всякая фундаментальная последовательность является либо положительной, либо отрицательной, либо нулевой.

<u>Доказательство</u>: Докажем в начале, что если последовательность не является нулевой, то существует положительное число К, такое, что $|a_n| > K$.

Действительно, последовательность фундаментальна, то есть $|a_m - a_n| < \varepsilon$ для всех номеров, больших чем n_0. Предположим, что теорема не верна, то есть для любого положительного ε существуют сколь угодно большие номера (в том числе и большие n_0), такие, что члены последовательности $|a_n| < \varepsilon$. Фиксируем один из них. Так как последовательность фундаментальна, при номерах, больших чем n_0

$|a_m| - |a_n| \le |a_m - a_n| < \varepsilon$

$|a_m| < \varepsilon + |a_n| < \varepsilon + \varepsilon$. Последнее означает, что все члены, начиная с некоторого номера n_0, по модулю являются сколь угодно малыми, а это означает, что данная последовательность нулевая, что противоречит условию. Таким образом, для ненулевой фундаментальной последовательности существует положительное число К, такое, что $|a_n| > K$. Тогда, либо $a_n > K$, либо $-a_n > K$. В силу фундаментальности последовательность для достаточно больших номеров оба

условия одновременно выполняться не могут. Действительно, если например, $a_n > K$, и $-a_m > K$, то

$$|a_m - a_n| \le |a_m| + |-a_n| = -a_m + a_n > K + K,$$

что противоречит фундаментальности (a_n). Таким образом, любая не сходящаяся к нулю фундаментальная последовательность является либо положительной, либо отрицательной.

Если теперь последовательность (a_n) отлична от нулевой, докажем, что для неё имеется обратная. Действительно, если последовательность не является нулевой, то она может иметь разве лишь конечное число нулевых членов. На соответствующих нулям позициях для обратной последовательности также будем записывать нули. Для остальных членов последовательности в соответствующих позициях будем записывать обратные им элементы, то есть $1/a_n$. При умножении полученной последовательности на исходную, получим последовательность, имеющую разве лишь конечное число нулевых членов, а все остальные челны произведения будут равны 1. Такая последовательность имеет предел, равный 1, а, следовательно, является фундаментальной единичной последовательностью (эквивалентной стационарной последовательности равной единице. Докажем, что построенная обратная последовательность также является фундаментальной. Действительно,

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right| = \left|\frac{a_n - a_m}{a_n a_m}\right| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n||a_m|}$$

Так как последовательность не является нулевой, начиная с некоторого номера,

$$|a_n| > d.$$

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n||a_m|} < \frac{|a_n - a_m|}{d^2}.$$

Так как последовательность (a_n) фундаментальна, можно также считать, что

$$|a_n - a_m| < \varepsilon d^2, \text{ то есть } \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right| < \varepsilon.$$

Теперь докажем, что построенное поле является упорядоченным. Для этого проверим справедливость условий из определения расположенного кольца. Во-первых, будем считать, что фундаментальная последовательность боль-

ше нуля, если она положительна. По теореме 6, всякая фундаментальная последовательность является либо положительной (большей нуля), либо отрицательной (противоположная к ней положительна), либо нулевой. Кроме того, если $(a_n) > 0$, $(b_n) > 0$, то начиная с некоторого номера n_0: $a_n > K_1 > 0$, и начиная в некоторого номера n_1: $b_n > K_2 > 0$. Выберем $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Тогда для всех номеров больших, чем n_2

$a_n + b_n > K_1 + K_2$, $a_n \cdot b_n > K_1 \cdot K_2$ (в силу справедливости свойств монотонности для рациональных чисел), а значит сумма и произведение положительных последовательностей снова будут последовательностями положительными.

Теорема 7 (об Архимедовской упорядоченности). Для любой фундаментальной последовательности (a_n) рациональных чисел, а также для любой положительной фундаментальной последовательности рациональных чисел $(b_n)>0$ существует такое натуральное число k, что при всех достаточно больших номерах n выполняется условие:

$a_n < kb_n$ или $(kb_n - a_n) > 0$.

<u>Доказательство:</u> Так как $(b_n) > 0$, существует такое рациональное число $d > 0$, что для всех достаточно больших номеров $b_n > d$. С другой стороны (a_n) – фундаментальная, а значит ограниченная, то есть $a_n < |a_n| < M$, где M – также рациональное число. Для рациональных чисел теорема Архимеда выполняется, то есть существует натуральное k такое, что $M < kd \Rightarrow a_n < M < kd < kb_n$ для достаточно больших номеров, а значит

$kb_n - a_n > kd - M$,

то есть последовательность $(kb_n - a_n) > 0$, что и требовалось доказать.

Все теоремы о сравнениях фундаментальных последовательностей легко обобщаются на классы конфинальных фундаментальных последовательностей. Для этого достаточно доказать, что если фундаментальная последовательность положительна, то и эквивалентная ей также будет положительна (доказательство по существу аналогично теореме 6). Таким образом, множество классов эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел есть Архимедовски упорядоченное поле. Если теперь мы поставим в соответствие

сходящимся последовательностям их рациональные пределы, а всем остальным фундаментальным последовательностям – некоторые новые символы, которые будут являться иррациональными числами, то мы получим модель поля действительных чисел. Остаётся доказать лишь свойство полноты построенного множества, то есть то, что каждая последовательность состоящая из действительных (а не только рациональных!) чисел имеет предел. Для этого предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 8. Для любого действительного числа α и для любого рационального $\varepsilon > 0$, существует такое рациональное число r, что $|\alpha - r| < \varepsilon$.

<u>Доказательство</u>: Так как α – действительное число, следовательно, оно либо рационально, (тогда оно совпадает с искомым), либо иррационально, то есть существует фундаментальная последовательность, сходящаяся к α: для любого рационального числа $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ можно найти номер n_0, что для всех достаточно больших номеров $n > n_0$: $|a_n - a_{n0}| < \varepsilon/2$. Рассмотрим стационарную последовательность, состоящую из $r = a_{n0}$, а также стационарную последовательность, состоящую из ε. Разность $\alpha - r = (a_n) - (a_{n0})$ меньше последовательности, состоящей из ε. Действительно, $\varepsilon - |\alpha - r| = \varepsilon - |a_n - a_{n0}| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$.

Теорема 9. Любая фундаментальная последовательность, составленная из классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел, сходится (модель обладает свойством полноты).

<u>Доказательство:</u> Пусть (α_n) – фундаментальная последовательность действительных чисел (как пределов некоторых фундаментальных последовательностей рациональных чисел). Тогда для любого числа α_n существует сколь угодно близкое к нему рациональное число r_n. Выберем эти числа так, чтобы выполнялись неравенства:

$$|\alpha_1 - r_1| < \frac{1}{2},\ |\alpha_2 - r_2| < \frac{1}{2^2}\ \ldots\ |\alpha_p - r_p| < \frac{1}{2^p}\ \ldots$$

Последовательность рациональных чисел (r_n) также является фундаментальной. Действительно, подберём такое значение p, чтобы $\frac{1}{2^{p+n}} < \frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{3}$ и

$|\alpha_{n+p} - \alpha_p| < \frac{\varepsilon}{3}$ (такое значение p существует в силу того, что (α_n) фундаментальна). Тогда

$|r_{n+p} - r_n| = |r_{n+p} - \alpha_{n+p} + \alpha_{n+p} - \alpha_p + \alpha_p - r_n| \le |r_{n+p} - \alpha_{n+p}| + |\alpha_{n+p} - \alpha_p| + |\alpha_p - r_n| <$

$< \frac{1}{2^{p+n}} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Таким образом, последовательность рациональных числе (r_n) сходится к некоторому действительному числу α. Данное α является также и пределом исходной последовательности действительных чисел. Выберем n_0 так, чтобы $|r_n - \alpha| < \varepsilon/2$ (существует в силу определения предела) и $|\alpha_n - r_n| < \varepsilon/2$ (существует по построению чисел r_n). Тогда при всех номерах больших выбранного

$$|\alpha_n - \alpha| = |\alpha_n - r_n + r_n - \alpha_n| \le |\alpha_n - r_n| + |r_n - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, модель действительных чисел построена и аксиоматическая теория действительных чисел непротиворечива.

Помимо рассмотренного выше подхода к построению аксиоматической теории действительных чисел по Мере-Кантору, существует и целый ряд других подходов, например, теория К. Вейерштрасса (1865), Р. Дедекинда (1872) и другие.

Задания для самостоятельного решения

№3.1. Доказать, что число иррационально:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{5}$; г) $\log_7 6$; д) $\cos 10^0$; е) $\operatorname{tg} 5^0$;

ж) $\sqrt{3}$; з) $\sqrt{6}$; з) $\sqrt{4 + \sqrt{5}}$; и) $\log_2 3$; к) $\cos 20^0$; л) $\operatorname{ctg} 10^0$.

№ 3.2. Упростите выражение:

а) $\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{....}}}}}}$;

б) $\sqrt{7\sqrt{21\sqrt{7\sqrt{21\sqrt{7\sqrt{....}}}}}}$

№ 3.3. Решите уравнение:

$\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{....}}}} = 49.$

3.2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В поле действительных чисел неразрешимо простейшее уравнение

$x^2 + 1 = 0$.

Для устранения этой проблемы вводится новое число i (*мнимая единица*) такое, что $i^2 = -1$.

Определение. Полем компле́ксных чисел называется минимальное поле, содержащее в качестве подполя поле действительных чисел, и в котором содержится элемент, квадрат которого равен – 1. Это поле обозначают буквой **C**

Символ вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица, называется комплексным числом с действительной частью $a = \mathrm{Re}z$ и мнимой частью $b = \mathrm{Im}z$. Сложение и умножение в множестве C комплексных чисел осуществляется по правилам:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$,

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$.

Не сложно проверить, что все аксиомы поля для множества таких чисел с введёнными операциями выполняются. В частности обратный элемент для любого отличного от 0 числа может быть найден следующим образом:

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i .$$

Корректность данного способа проверяется умножением числа на обратное к нему. Действительное число a можно трактовать как комплексное число $a + 0i$, так что поле действительных чисел является подмножеством множества **C**.

Числами вида $a + bi$ исчерпывается все поле комплексных чисел. Поскольку поле является устойчивым относительно сложения и умножения, то вместе с любыми двумя действительными числами a и b, а также мнимой единицей i , оно должно содержать и любое выражение вида $z = a + bi$, так что построенное поле удовлетворяет условию минимальности. Данная форма комплексного числа называется алгебраической. a называется действительной частью числа, a b – мнимой частью числа.

Идея геометрического представления комплексных чисел заключается в том, что комплексному числу $x + yi$ сопоставляется точка плоскости с координатами (x, y). Данную модель впервые предложил К. Вессель (1799). Другой вариацией является представление комплексного числа матрицей:

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Каждое комплексное число можно представить в алгебраической и тригонометрической форме $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Если каждому такому числу z сопоставить матрицу $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, то сумме, разности и произведению двух любых комплексных чисел будет соответствовать сумма, разность и произведение соответствующих матриц. Например, произведению чисел $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ будет соответствовать матрица

$$\begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + x_2y_1) \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Более того, обратное для комплексного числа $(x + iy)^{-1} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ соответствует матрице $\begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$, которая является обратной к матрице $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

Таким образом, деление комплексных чисел также сводимо к умножению матрицы делимого на матрицу обратную к матрице делителя. Поэтому данное множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ можно считать моделью поля комплексных чисел. Тригонометрическое представление матричной модели интересно ещё и тем, что матрица $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ задает оператор поворота на угол φ, что соответствует геометрическому смыслу умножения на комплексное число (при ум-

ножении происходит растяжение в r раз и поворот на угол, равный аргументу φ).

Можно было ожидать, что при анализе уравнений более высоких степеней возникнет необходимость в дальнейшем обобщении понятия числа. Но в 1799 году К. Гаусс доказал так называемую *Основную теорему алгебры*.

Теорема. Всякое алгебраическое уравнение степени n с действительными или комплексными коэффициентами $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ в поле комплексных чисел имеет n корней (с учетом их кратностей).

Однако, получая возможность находить корни всех многочленов, мы теряем возможность сравнивать числа между собой.

Теорема. Поле комплексных чисел не является упорядоченным полем.

Доказательство: Действительно, любое упорядоченное поле должно являться расположенным кольцом, а значит для него справедливо свойство о том, что квадрат любого числа неотрицателен. В поле же комплексных чисел данное свойство не выполняется, так как $i^2 = -1 < 0$.

Задания для самостоятельного решения

№3.4. . Вычислите:

а) $(7 - 3i)^3$; б) $\dfrac{2-5i}{1-\sqrt{3}i}$; в) $\dfrac{z-\bar{z}}{2}$; г) i^5; д) i^{228}; е) i^{137};

ж) $(2 + i)^2$; з) $\dfrac{(1+2i)^3-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^3}$; и) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^n}$; к) $\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$.

№ 3.5. Запишите числа комплексно-сопряжённые данным и на комплексной плоскости постройте векторы, изображающие данные числа и комплексно-сопряжённые с ними, запишите матричную форму данных чисел.

а) $z = 3 + i$; б) $z = 3 - i$; в) i; г) $-5i$.

№ 3.6. На комплексной плоскости заштрихуйте все точки z, удовлетворяющие условиям

а) $|z + i| = 3$; б) $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$

в) $|z - i| < |z + 2 - 3i|$; г) $\begin{cases} |z-i| = 1 \\ \arg z = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

д) $|z| < |z/2| + 1$; е) $|z - 1 + i| \le 2$.

№ 3.7. Решите уравнения:

а) $x^2 - (4 + 3i)x + 1 + 5i = 0$; б) $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 + 3i$.

3.3. ТЕЛО КВАТЕРНИОНОВ. АЛГЕБРЫ КОНЕЧНОГО РАНГА

Термин «кватернион» принадлежит ирландскому математику Уильяму Роуэну Гамильтону, и был введен им в 1843 году. Так как комплексные числа имеют вид $a + bi$, то есть состоят из двух частей, комплексные числа – это своего рода «двойные числа».

Замечание: в ряде источников двойными называются числа вида $a + bi$, где $i^2 = 1$, а числа вида $a + bi$, где $i^2 = 0$ называются дуальными. Разумеется, не следует путать эти числа с комплексными.

Буквально, слово «кватернионы» означает «четверные числа», то есть числа, имеющие вид

$$x + yi + uj + vk,$$

где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Иными словами, к действительным числам добавляют не одну, а сразу три мнимые единицы. Возникает вопрос, а почему же не рассмотреть вначале «тройные числа», то есть множество с двумя мнимыми единицами, а не с тремя. Сначала ответим на вопрос, а можно ли вообще добавить к полю комплексных чисел еще одну новую мнимую единицу так, чтобы построенное множество сохранило структуру поля. Оказывается ответ на этот вопрос отрицательный. Действительно, равенство $i^2 = j^2$ $(= -1)$ можно переписать в виде $i^2 - j^2 = 0$, что равносильно в поле равенству $(i - j)(i + j) = 0$. В поле произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, то есть $j = \pm i$, то есть, добавляя число j к полю комплексных чисел, мы не вносим в это поле ничего нового. Заметим, однако, что полученный вывод в неявном виде опирается на коммутативный закон умножения (при доказательстве формулы сокращенного умножения

$$i^2 - j^2 = (i - j)(i + j)$$

используется тот факт, что $ij = ji$). Однако операции над целым рядом математических (и физических) объектов свойством коммутативности не обладают. Поэтому дальнейшее расширение понятие числа в математике пошло по пути отказа от коммутативного закона.

Определение. *Телом* называется ненулевое кольцо с единицей, в котором каждый элемент отличный от нуля имеет обратный.

Уменьшив свои требования, то есть отказавшись от коммутативного закона, попробуем найти некоммутативное тело K, содержащее в себе новую мнимую единицу j, не совпадающую ни с одним из комплексных чисел (при этом, разумеется, коммутативный закон сохраняется для перемножения действительных или комплексных чисел, а вот j может и не быть перестановочным с некоторыми комплексными числами). Так как тело, по определению, является кольцом, элемент ij также должен принадлежать искомому телу. Предположим, что существует тело, состоящее из «тройных чисел» и произведение ij принадлежит этому телу, то есть $ij = c_0 + c_1 i + c_2 j$, где c_0, c_1, c_2 – действительные числа. Умножим обе части этого равенства на i слева. Получим:

$$-j = c_0 i - c_1 + c_2 ij = c_0 i - c_1 + c_2(c_0 + c_1 i + c_2 j),$$

откуда

$$(c_0 c_2 - c_1) + (c_0 + c_1 c_2)i + (1 + c_2^2)j = 0.$$

$1 + c_2^2 \neq 0$ (c_2 – число действительное), следовательно,

$$j = -\frac{(c_0 c_2 - c_1) + (c_0 + c_1 c_2)i}{1 + c_2^2},$$

то есть j вновь является обычным комплексным числом. Поэтому для построения нового числового множества необходимо потребовать, чтобы ij также было новым числом. У. Гамильтон доказал, что необходимо потребовать, чтобы $(ij)^2 = -1$, то есть необходима ещё одна мнимая единица, которую обозначим символом k. Добавление такой мнимой единицы уже приводит к построению нового числового множества, которое и будем называть телом кватернионов.

Определение. Системой кватернионов называется тело, удовлетворяющее условиям:

1) оно содержит в себе поле комплексных чисел;

2) оно содержит новую мнимую единицу j ($j^2 = -1$), которая не является комплексным числом, причём мнимая единица перестановочна с любым действительным числом;

3) $(ij)^2 = -1$;

4) всякий элемент системы кватернионов представим в виде $c_1 + c_2 j$, где c_1, c_2 – комплексные числа.

Всякий элемент данной системы называется кватернионом, а система кватернионов также называется телом кватернионов.

Обозначим $ij = k$, тогда $i^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = ijk = -1$. Умножение мнимых единиц осуществляется по правилам:

$$ij = k, \quad ji = -k,$$
$$jk = i, \quad kj = -i,$$
$$ki = j, \quad ik = -j.$$

Последние пять равенств выводятся из равенства $ij = k$ путём умножения его слева или справа на различные (удобные) мнимые единицы. Например, умножая первое равенство на i слева, получим

$$i^2 j = ik \qquad -j = ik \qquad ik = -j.$$

Затем умножаем, например, полученное равенство на k справа:

$$-jk = ik^2 \qquad -jk = -i \qquad jk = i$$

и так далее.

Запомнить эту «таблицу умножения» помогает рис.1, на котором кватернионы i, j, k изображены тремя точками окружности, расположенными по направлению движения часовой стрелки в алфавитном порядке. Произведение любых двух чисел из тройки i, j, k равно третьему, если движение от первого множителя ко второму происходит по часовой стрелке, и равно третьему со знаком минус, если движение происходит против часовой стрелки. Как видим, переместительное свойство умножения здесь не выполняется: произведение зависит от порядка сомножителей.

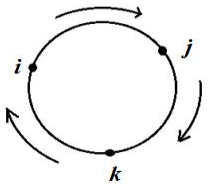


Рис. 1. Схема перемножения кватернионных мнимых единиц

Если $c_1 = x + yi$, $c_2 = u + vi$, то произвольный кватернион будет иметь вид

$$c_1 + c_2 j = x + yi + (u + vi)j = x + yi + uj + vk.$$

Такое представление кватерниона называется его алгебраической формой. Первое слагаемое называется скалярной частью кватерниона, $yi + uj + vk$ – векторной частью. Аналогично можно выразить кватернион и, например, в виде $z_1 + z_2 i$, где $z_n = a_n + b_n j$ (n = 1, 2):

$$z_1 + iz_2 = a_1 + b_1 j + i\cdot(a_2 + b_2 j) = a_1 + b_1 j + a_2 i + b_2 k.$$

Арифметические действия над кватернионами выполняются согласно обычным правилам раскрытия скобок. Так сумма двух кватернионов вычисляется по формуле

$$x_1 + y_1 i + u_1 j + v_1 k + x_2 + y_2 i + u_2 j + v_2 k =$$
$$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i + (u_1 + u_2)j + (v_1 + v_2)k,$$

а произведение по формуле

$$(x_1 + y_1 i + u_1 j + v_1 k)(x_2 + y_2 i + u_2 j + v_2 k) =$$
$$=(x_1x_2 - u_1u_2 - y_1y_2 - v_1v_2) + (y_1x_2 - v_1u_2 + x_1y_2 + u_1v_2)i + (u_1x_2 + x_1u_2 + v_1y_2 - y_1v_2)j +$$
$$+(v_1x_2 + y_1u_2 - u_1y_2 + x_1v_2)k.$$

Вывод последней формулы осуществляется непосредственно на основании дистрибутивного закона и таблицы умножения кватернионных мнимых единиц. Однако видно, что этот вывод весьма громоздок, а формула не слишком легка для запоминания. Для облегчения выполнения умножения кватернионов можно прибегнуть к матричной модели кватернионов в алгебраической форме.

Поскольку, по определению алгебраической формы комплексного числа, x и y являются действительными, матричная модель комплексного числа не изменится если каждому комплексному числу ставить в соответствии матрицу $\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$ (черта сверху означает комплексное сопряжение), так как комплексно-сопряжённое к действительному числу рано самому этому числу, то есть $\bar{x} = x$ для всех действительных x.

Теперь вернемся к представлению кватернионов в виде

$$z_1 + iz_2 = a_1 + b_1j + i\cdot(a_2 + b_2j) = a_1 + b_1j + a_2i + b_2k.$$

Кватерниону $z_1 + i\cdot z_2$ можно поставить в соответствие матрицу $\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$. Отличие от модели для комплексных чисел будет состоять в том, что элементы матрицы теперь являются не действительными, а комплексными числами (знак сопряжения теперь будет играть существенную роль). Операции в построенной матричной модели вновь будут согласованы с операциями над кватернионами. Далее, каждый элемент матрицы $\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$ можно, в свою очередь, заменить на матрицу, задающую данное комплексное число, и мы получим блочную матрицу, состоящую из четырёх клеток, каждая клетка которой есть матрица размера 2x2, или же матрицу размера 4x4 с действительными элементами:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -a_2 & -b_2 \\ b_1 & a_1 & b_2 & -a_2 \\ a_2 & -b_2 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & -b_1 & a_1 \end{pmatrix},$$

соответствующую кватерниону $a_1 + a_2i + b_1j + b_2k$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что действия над такими матрицами соответствуют действиям над кватернионами. Таким образом, кватернион можно представлять либо матрицей 2x2 с комплексными коэффициентами, либо матрицей 4x4 с действительными коэффициентами.

Матричное представление удобно использовать для выполнения умножения кватернионов, заметив при этом, что для получения результата нет необходимости выписывать обе матрицы целиком. Все коэффициенты кватерниона уже представлены в первом столбце матрицы (обратите внимание, что коэффициент при мнимой единице i находится на третьем месте, а при j – на втором), поэтому для получения ответа нам достаточно найти только первый столбец результата. Для этого можно первую матрицу выписать целиком, у второй же матрицы выписать только первый столбец.

Вычислим, например, матричным способом произведение кватернионов, которое было приведено выше: $(x_1 + y_1i + u_1j + v_1k)\,(x_2 + y_2i + u_2j + v_2k)$.

Полностью выпишем матрицу, соответствующую первому кватерниону. Верхняя левая клетка определяется числом $x_1 + u_1 j$: $\begin{pmatrix} x_1 & -u_1 \\ u_1 & x_1 \end{pmatrix}$, нижняя правая клетка – числом сопряжённым к этому числу, то есть числом $x_1 - u_1 j$: $\begin{pmatrix} x_1 & u_1 \\ -u_1 & x_1 \end{pmatrix}$ (заметим, что полученные матрицы также являются сопряженными друг к другу согласно определениям принятым в курсе линейной алгебры, где под сопряжённой матрицей понимается матрица транспонированная по отношению к исходной, все элементы которой являются комплексно-сопряжёнными к элементам исходной матрицы). Две другие клетки определяются компонентами y_1 и v_1: левая нижняя клетка – это матрица $\begin{pmatrix} y_1 & -v_1 \\ v_1 & y_1 \end{pmatrix}$, правая верхняя – $\begin{pmatrix} -y_1 & -v_1 \\ v_1 & -y_1 \end{pmatrix}$ (матрица транспонированная к матрице $\begin{pmatrix} y_1 & -v_1 \\ v_1 & y_1 \end{pmatrix}$ и взятая со знаком минус). Таким образом, первый кватернион задается матрицей

$$\begin{pmatrix} x_1 & -u_1 & -y_1 & -v_1 \\ u_1 & x_1 & v_1 & -y_1 \\ y_1 & -v_1 & x_1 & u_1 \\ v_1 & y_1 & -u_1 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Матрица второго кватерниона – такая же, только все индексы равны двум. Выписывать эту матрицу нет необходимости, достаточно выписать её первый столбец $(x_2, u_2, y_2, v_2)^{\mathrm{T}}$ – это все коэффициенты кватерниона, коэффициент при j выписывается раньше, чем коэффициент при i.

$$\begin{pmatrix} x_1 & -u_1 & -y_1 & -v_1 \\ u_1 & x_1 & v_1 & -y_1 \\ y_1 & -v_1 & x_1 & u_1 \\ v_1 & y_1 & -u_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ u_2 \\ y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - u_1u_2 - y_1y_2 - v_1v_2 \\ u_1x_2 + x_1u_2 + v_1y_2 - y_1v_2 \\ y_1x_2 - v_1u_2 + x_1y_2 + u_1v_2 \\ v_1x_2 + y_1u_2 - u_1y_2 + x_1v_2 \end{pmatrix},$$

что соответствует кватерниону

$(x_1x_2 - u_1u_2 - y_1y_2 - v_1v_2) + (y_1x_2 - v_1u_2 + x_1y_2 + u_1v_2)i + (u_1x_2 + x_1u_2 + v_1y_2 - y_1v_2)j +$
$+(v_1x_2 + y_1u_2 - u_1y_2 + x_1v_2)k.$

Данный результат полностью совпадает с полученным ранее путём раскрытия скобок.

Модулем кватерниона называется квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов его представления в алгебраической форме

$|q| = \sqrt{x^2 + y^2 + u^2 + v^2}$.

Любой кватернион можно нормировать, поделив его на его норму (поделив его на $\sqrt{x^2 + y^2 + u^2 + v^2}$). Полученный в результате кватернион будет иметь норму равную единице. Такой кватернион называется нормированным. Пусть дан кватернион $q = x + yi + uj + vk$. Сопряженным ему называется кватернион $\overline{q} = x - yi - uj - vk$.

Также как и для случая с комплексными числами, имеет место равенство $q\,\overline{q} = |q|^2$.

Доказательство:

$$\begin{pmatrix} x & -u & -y & -v \\ u & x & v & -y \\ y & -v & x & u \\ v & y & -u & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -u \\ -y \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + u^2 + y^2 + v^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то есть $q\,\overline{q} = x^2 + u^2 + y^2 + v^2 + 0i + 0j + 0k = |q|^2$.

Аналогично доказывается, что $\overline{q}\,q = |q|^2$.

Для каждого ненулевого кватерниона существует ему обратный. Обратным по отношению к кватерниону q называется кватернион q^{-1}, обладающий свойством

$$q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1.$$

Обратный кватернион находится по правилу, весьма похожему на правило нахождения обратного к комплексному числу:

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}.$$

Действительно, $q\,\dfrac{\overline{q}}{|q|^2} = \dfrac{\overline{q}}{|q|^2}\,q = \dfrac{q\overline{q}}{|q|^2} = \dfrac{|q|^2}{|q|^2} = 1$.

При описании деления кватернионов, прежде всего, необходимо обратить внимание на существенное отличие в самой постановке вопросов о делении кватернионов и делении комплексных чисел. Для комплексных чисел частным

от деления z_1 на z_2 называется решение уравнения $z_2x = z_1$. Но для кватернионов произведение зависит от порядка сомножителей, поэтому вместо одного уравнения нужно рассматривать два:

$$q_2 x = q_1 \qquad (1)$$

$$x\, q_2 = q_1. \qquad (1^*)$$

Соответственно этому решение уравнения (1) называется левым частным от деления q_1 на q_2 и обозначается $x_л$, а решение уравнения (1*) – правым частным $x_{пр}$ (в случае комплексных чисел $x_л = x_{пр}$).

Чтобы найти левое частное, умножим обе части уравнения (1) слева на $\frac{\overline{q}_2}{|q_2|^2}$.

$$x_л = \frac{\overline{q}_2}{|q_2|^2} q_1.$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (1) убеждаемся, что это выражение действительно является решением.

Аналогично находится правое частное: $x_{пр} = q_1 \frac{\overline{q}_2}{|q_2|^2}$.

Пусть задан кватернион в алгебраической форме $q = x + yi + uj + vk$, и первая компонента $x = 0$. Такой кватернион называется *чисто векторным* (по аналогии с разложением вектора по базису трёхмерного векторного пространства i, j, k: $yi + uj + vk$), если же $y = u = v = 0$, то мы будем иметь дело со скалярной величиной (скалярный кватернион). Вообще же компонента x при действительной единице называется скалярной частью кватерниона (обозначение: scal q), а $yi + uj + vk$ называется векторной частью кватерниона vect q. При сложении кватернионов независимо складываются их скалярные и векторные части. Геометрический смысл операции умножения кватернионов наиболее наглядно можно проиллюстрировать, начав с рассмотрения частных случаев.

Если q_1 и q_2 скалярные кватернионы, то их произведение также является скалярным кватернионом. В случае, когда $q_1 = x$ – скалярный кватернион, а q_2 – чисто векторный кватернион, произведение

$$q_1 \cdot q_2 = x \cdot (yi + uj + vk)$$

является векторным кватернионом, и операция умножения совпадает с умножением вектора r в пространстве на действительное число x.

И, наконец, если оба кватерниона чисто векторные: $q_1 = y_1 i + u_1 j + v_1 k$, $q_2 = y_2 i + u_2 j + v_2 k$, то, обратившись к матричной модели

$$\begin{pmatrix} 0 & -u_1 & -y_1 & -v_1 \\ u_1 & 0 & v_1 & -y_1 \\ y_1 & -v_1 & 0 & u_1 \\ v_1 & y_1 & -u_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1u_2 - y_1y_2 - v_1v_2 \\ v_1y_2 - y_1v_2 \\ -v_1u_2 + u_1v_2 \\ y_1u_2 - u_1y_2 \end{pmatrix},$$

получим

$$q_1 q_2 = -(y_1y_2 + u_1u_2 + v_1v_2) + (u_1v_2 - v_1u_2)i + (v_1y_2 - y_1v_2)j + (y_1u_2 - u_1y_2)k.$$

Как видно из последней формулы, скалярная часть произведения q_1q_2 равна скалярному произведению векторов (q_1, q_2) со знаком минус. Векторная же часть q_1q_2 – это векторное произведение $[q_1, q_2]$ записанное в координатах:

$$[q_1, q_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ y_1 & u_1 & v_1 \\ y_2 & u_2 & v_2 \end{vmatrix} = (u_1v_2 - v_1u_2)i + (v_1y_2 - y_1v_2)j + (y_1u_2 - u_1y_2)k.$$

Алгеброй ранга n (или просто алгеброй) над полем P называется n-мерное векторное пространство над полем P, если в нём помимо операций сложения векторов и умножения на скаляры (α), определено умножение векторов, которое подчиняется законам (для любых векторов a, b, c):

1) ассоциативному: a(bc) = (ab)c

2) двум дистрибутивным: (a+b)c = ac + bc, a(b + c) = ab + ac

3) умножение скаляров и векторов связано равенствами:

(αa)b = a(αb) = α(ab)

Алгебра, в которой выполняется действие обратное умножению (деления на нуль не требуется) называется *алгеброй с делением*.

Теорема Фробениуса (1878). Единственными алгебрами с делением над полем действительных чисел, определёнными с точностью до изоморфизма являются: само поле действительных чисел, поле комплексных чисел и тело кватернионов.

Задания для самостоятельного решения

№3.8. Дан кватернион q = 2 + 3i – 5j + k. Найти:

а) $q + \bar{q}$; б) $q - \bar{q}$; в) $q \cdot \bar{q}$.

№ 3.9. Найти обратный кватернион к кватерниону $q = 1 + i + k$.

№3.10. Найти левые и правые частные от деления кватерниона j + 2k на кватернион $1 + i + k$.

№ 3.11. Найти произведение $(j + k)(1 + i - j)^{-1}$.

№ 3.12. Вычислите произведение кватернионов $q_1 = 2 + 3i - 4j - k$ и $q_2 = 5 - i + 2j + 3k$ различными способами.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
Часть 1. Натуральные числа
1.1. Вводные сведения об аксиоматических теориях. 4
1.2. Аксиоматическое определение натуральных чисел 6
1.3. Сложение натуральных чисел 12
1.4. Умножение натуральных чисел 18
1.5. Упорядоченность множества натуральных чисел. Неравенства на множестве натуральных чисел. 22
1.6. Различные формы принципа математической индукции 26
1.7. Другие операции над натуральными числами 29
Часть 2. Целые и рациональные числа
2.1. Кольцо целых чисел. Определения и свойства 31
2.2. Расположенные кольца и их общие свойства. Расположенность кольца целых чисел 39
2.3. Поле рациональных чисел 47
Часть 3. Действительные числа. Краткие сведения о дальнейших обобщениях понятия числа
3.1. Действительное число как предел последовательности 57
3.2. Комплексные числа 67
3.3. Тело кватернионов. Алгебры конечного ранга 70

Числовые системы
учебное пособие для направления подготовки бакалавров
050100.62 «Педагогическое образование», профиль «Математика»
составитель: Глухова Н.В.

В авторской редакции План университета 2014.

Лицензия ЛР №04029 от 12.02.97 г.

Подписано в печать 24.12.12. Формат бумаги 60х90 1\6
Бумага офсетная Усл. печ. л. 5.
Тираж 100 экз. Уч. – изд. л.
Заказ №

Ротапринт Ульяновского государственного педагогического университета им. И.Н. Ульянова.
432700, Ульяновск, пл. 100-летия В.И. Ленина, 4.